现代应用数学丛书

差分方程

〔日〕福田武雄 著

上海科学技术出版社

統一书号 13119·470
定　价 0.38 元



现代应用数学丛书

差分方程

〔日〕福田武雄 著

穆 鴻 基 譯

胡 家 赣 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。全书集中介紹差分方程的基础理論。共分五章：第1章介紹和分与差分的概念，第2章介紹綫性差分方程的一般理論，第3、第4章分別討論常系数和变系数綫性差分方程，最后一章介紹綫性偏差分方程的类型、一般解和边界条件。本书可供高等学校数学、物理系和工程各系师生作参考。

現代应用数学丛书

差 分 方 程

原书名 差 分 方 程 式
原著者 〔日〕 福 田 武 雄
原出版者 岩 波 书 店 1957
譯 者 穆 鴻 基
校 者 胡 家 贛

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印張 2 2/32 字数 47,000
1962年9月第1版 1962年9月第1次印刷
印数 1—5,500

統一书号：13119・470
定 价：（十四）0.38元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其内容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

书名	原作者	譯者
代数学	弥永昌吉等	熊全淹
几何学*	矢野健太郎	孙澤瀛
复变函数	功力金二郎	刘书琴
集合·拓扑·測度*	河田敬义	輯英华
泛函分析*	吉田耕作	程其襄
广义函数*	岩村联	楊永芳
常微分方程	福原满洲雄	張庆芳
偏微分方程*	南云道夫	錢端壮
特殊函数*	小谷正雄等	錢端壮
差分方程	福田武雄	穆鸿基
富里哀变换与拉普拉斯变换*	河田龙夫	錢端壮
变分法及其应用*	加藤敏夫	周怀生
李群論*	岩堀长庆	孙澤瀛
随机过程*	伊藤清	刘璋温
回轉群与对称群的应用	山内恭彦等	張质賢
結晶統計与代数	伏見康治	孙澤瀛
偏微分方程的应用	犬井鉄郎等	楊永芳
微分方程的近似解法	加藤敏夫等	王占瀛
数值計算法	森口繁一等	關昌龄
量子力学中的数学方法*	朝永振一郎	周民强
工程力学系統*	近藤一夫等	刘亦珩
非綫性振动論	古屋茂	吕紹明
力学系与映射理論*	岩田义一	孙澤瀛
平面彈性論*	森口繁一	刘亦珩
有限变位彈性論 变形几何学*	山本善之 近藤一夫	刘亦珩
塑性論*	鷲津久一郎	刘亦珩
粘性流体理論*	谷一郎	刘亦珩
可压縮流体理論*	河村龙馬	刘亦珩
网絡理論	喜安善市等	陆志刚
自动控制論	喜安善市等	程立林
回路拓扑学	近藤一夫	張鸣镛
信息論	喜安善市等	李文清
推断統計理論	北川敏男	李賢平
統計分析*	森口繁一	刘璋温
实驗設計	増山元三郎	刘璋温
群体遺傳学的数学理論*	木村資生	刘祖洞
博奕論	官澤光一	張馳春
綫性規划	森口繁一	刘源張
經济理論中的数学方法	安井琢磨等	談祥柏
随机过程的应用*	河田龙夫	刘璋温
計算技术	高桥秀俊	姚晋
穿孔卡計算机	森口繁一	刘源張

注：有*者已在1962年7月以前出版。

目　录

第1章 和分与差分

§1 差 分

1．差分的意义 設 $y=f(x)$ 为自变数 x 的函数。不管 y 連續或不連續，只要它在所考慮的范圍內是取有限值的函数。自变数 x 不必限制为連續的，也可以只取一个个的特定值，例如取…$-1, 0, 1, 2, \cdots$等。

現在取 Δx 作为 x 的一个步长，当 x 自某值 a 变到另一值 $a+\Delta x$ 时，設 y 的增加量为 Δy，此时称 Δy 为"y 在 $x=a$ 处的**差分**"，Δx 称为 x 的差分。通常也称为"阶差"或"有限差分"。

Δy 与 Δx 的比，也就是 $\Delta y/\Delta x$，称为**差商**。当 $\Delta x\to 0$ 时，求这个比的值是微分学的問題，但在差分問題中，Δx 为有限值，它是在所給定的 x 的全变域内取某一定值的量。差分与差商，分別与微分学中的微分与微商相对应。

以后在沒有特別指明时，我們規定取 $\Delta x=1$. 这样的規定并不影响一般性。原因是在所討論的問題中，当自变数的差分不为1时，可以通过适当的自变数的綫性变换，使自变数的差分等于1.

記函数 $y=f(x)$ 在 $x=x$ 处的值为 y_x，在 $x=x+i$ (i 为整数) 处的值为 y_{x+i}，在 $x=x$ 处的差分为 Δy_x，则

$$\Delta y_x=y_{x+1}-y_x. \tag{1.1}$$

2．高阶差分 (1.1) 式中的 Δy_x 一般还是 x 的函数，所以仍可以考慮 Δy_x 的差分 $\Delta(\Delta y_x)$，以 $\Delta^2 y_x$ 表之，则

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_x=\Delta(\Delta y_x)&=\Delta y_{x+1}-\Delta y_x=y_{x+2}-y_{x+1}-(y_{x+1}-y_x)\\&=y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x,\end{aligned} \tag{1.2}$$

叫做"y 在 $x=x$ 处的第2阶差分"。在有必要加以区别时，称 Δy_x

为"第1阶差分"。以此类推，我們可以考虑第3阶，第4阶，…差分。一般"第n阶差分"写作

$$\Delta^n y_x=\Delta^{n-1}y_{x+1}-\Delta^{n-1}y_x=y_{x+n}-\binom{n}{1}y_{x+n-1}+\binom{n}{2}y_{x+n-2}-\binom{n}{3}y_{x+n-3}+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}y_{x+1}+(-1)^n y_x, \tag{1.3}$$

其中$\binom{n}{r}$是二項式的系数：

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}. \tag{1.4}$$

反之，y的各个值y_{x+1}, y_{x+2}, …也可以用y_x与它的差分表示出来。我們可以很容易地証明

$$\left.\begin{aligned}&y_{x+1}=y_x+\Delta y_x,\\&y_{x+2}=y_{x+1}+\Delta y_{x+1}=y_x+2\Delta y_x+\Delta^2 y_x,\\&y_{x+n}=y_x+\binom{n}{1}\Delta y_x+\binom{n}{2}\Delta^2 y_x+\cdots+\binom{n}{n-1}\Delta^{n-1}y_x\\&\qquad+\Delta^n y_x.\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

若把等式右边的記号Δ当作一个数看待，則由二項式定理，y_{x+n}可以簡单地表示成

$$y_{x+n}=(1+\Delta)^n y_x. \tag{1.6}$$

3. 多变数函数的差分(偏差分) 对于互相独立的两个自变数x, y的函数$z=f(x, y)$，固定y而使x变化，$x=x+1$时z的值$(z_{x+1,y})$与$x=x$时z的值$(z_{x,y})$之差，称为"在$x=x$, $y=y$处z关于x的**偏差分**"，記之为$\Delta_x z_{x,y}$. 也就是

$$\Delta_x z_{x,y}=z_{x+1,y}-z_{x,y}. \tag{1.7}$$

同理，z关于y的偏差分是

$$\Delta_y z_{x,y}=z_{x,y+1}-z_{x,y}. \tag{1.7'}$$

由于这些偏差分，一般还是x, y的函数，所以仍可以求关于x

或 y 的偏差分。也就是

$$\left.\begin{aligned}\Delta_{x^2}^2 z_{x,y}&=\Delta_x(\Delta_x z_{x,y})=\Delta_x z_{x+1,y}-\Delta_x z_{x,y}\\&=z_{x+2,y}-2z_{x+1,y}+z_{x,y},\\\Delta_y^2 z_{x,y}&=z_{x,y+2}-2z_{x,y+1}+z_{x,y},\\\Delta_{xy}^2 z_{x,y}&=\Delta_x(\Delta_y z_{x,y})=\Delta_y(\Delta_x z_{x,y})\\&=z_{x+1,y+1}-z_{x+1,y}-z_{x,y+1}+z_{x,y}.\end{aligned}\right\}\qquad(1.8)$$

这些都是第 2 阶偏差分，同理我們仍可以依次考虑 3 阶以上的偏差分。又对于含有 3 个以上的自变数的函数的偏差分，可以按上述同样方法考虑。在上述的考察中，自变数的差分 Δx, Δy 可以都取作 1，而絲毫不会損害其一般性。原因是总可以作一个自变数的綫性变换使 $\Delta x=1$, $\Delta y=1$.

§2 和　分

1. 和分的意义　給定函数 $y_x=f(x)$，設有函数 $F(x)$，其第 1 阶差商等于 y_x，也就是满足

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=f(x),\qquad(2.1)$$

这种函数 $F(x)$ 称为"所給定的函数 $y_x=f(x)$ 的**和分**"，求 $F(x)$ 叫做"求和分"。(2.1)式也可以写作

$$\Delta F(x)=f(x)\Delta x \text{ 或 } \Delta F(x)=y_x\Delta x.\qquad(2.2)$$

由于 Δx 通常等于 1，此时 $f(x)$ 的和分定义出第 1 阶差分等于 $f(x)$ 的某个函数。和分与差分之間的关系相当于积分与微分之間的关系。

今設 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的和分，則 $F(x)$ 与一任意常数 C 的和 $F(x)+C$ 仍然满足(2.1)或(2.2)式，又設 $p(x)$ 为周期等于 Δx 的任意的周期函数，則 $F(x)+p(x)$ 也满足(2.1)式或(2.2)式。$y_x=f(x)$ 的和分一般用符号

$$\mathfrak{S} f(x)\,\Delta x \quad \text{或} \quad \mathfrak{S} y_x \Delta x$$

表示,而由于 $p(x)$ 中含有任意常数,所以

$$\mathfrak{S} f(x)\,\Delta x = F(x) + p(x). \tag{2.3}$$

也就是 $f(x)$ 的和分有无数个。这与不定积分是一样的,(2.3) 式中的 $p(x)$ 相当于积分中的积分常数。但是沒有特殊必要时 $p(x)$ 一般略去。

上面所用的符号 $\mathfrak{S}$ 是由 Nörlund 和 Bleich 开始使用的,以前是用普通的符号 Σ. 可是和分与通常的簡单和有不同的意义,所以本书中不使用 Σ. 和分記号中的 Δx 不能略去,即使 $\Delta x=1$ 也是如此。原因是当比較(2.3)两边的次数或因次时,或进行自变数的变换时它是很必要的。

2. 定和分 在(2.3)式中取 $x=a$, 則

$$\left[\mathfrak{S} f(x)\,\Delta x\right]_a = F(a) + p(a).$$

設 n 为正整数, $b=a+n\Delta x$, 取 $x=b$, 則有

$$\left[\mathfrak{S} f(x)\,\Delta x\right]_b = F(b)_b + p(b).$$

用 $\mathfrak{S}_a^b f(x)\,\Delta x$ 表示 $\left[\mathfrak{S} f(x)\,\Delta x\right]_b - \left[\mathfrak{S} f(x)\,\Delta x\right]_a$, 由于 $p(a)=p(b)$, 故

$$\mathfrak{S}_a^b f(x)\,\Delta x = F(b) - F(a). \tag{2.4}$$

这相当于积分法中的定积分,故称之为**定和分**。a 称为定和分的下限, b 为上限。又我們也能很容易地証明

$$\mathfrak{S}_a^b y_x \Delta x = (y_a + y_{a+1} + \cdots + y_{b-1})\,\Delta x. \tag{2.5}$$

注意 关于各种各样的特殊函数的和分与和分的求法(例如与分部积分法对应的分部和分法等),有很多意味深厚的問題,在以差分方程为主題的本书中,不能詳談了,有兴趣的讀者請参閱福田:差分法(河出书房 1948)。

第2章 綫性差分方程概論

§3 差分方程

一方程，除含有 §1 所定义的 x 的函数 y_x 与 x 外，还含有 y_x 的差分 Δy_x, $\Delta^2 y_x$, …，亦即型如

$$\Phi(x, y, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \cdots, \Delta^n y_x)=0 \tag{3.1}$$

❶

的方程称为**差分方程**。对于任意的 x，满足此差分方程的函数 $y_x=f(x)$ 叫作**差分方程的解**。求解的过程叫作解差分方程。

若取 x 的差分 $\Delta x=1$，并将 Δy_x, $\Delta^2 y_x$, …用 (1.1)～(1.3)式表示为 y_x, y_{x+1}, … 的多项式，然后代入(3.1)式，則得

$$F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \cdots, y_{x+n})=0. \tag{3.2}$$

这是与(3.1)式完全等价的方程，利用(1.5)式，也可以反过来从(3.2)式导出(3.1)式。

例如 Φ 的形式为

$$\Delta^2 y_x-2\Delta y_x+y_x-c=0,$$

将(1.1)式的 Δy_x 与(1.2) 式的 $\Delta^2 y_x$ 代入，即得

$$y_{x+2}-4y_{x+1}+4y_x-c=0.$$

在实用上，应用問題表示成差分方程时，大部分是 (3.2) 的形式，而且由于这种形式容易处理，所以在本书中把 (3.2) 式取作差分方程的基本形式。

象微分方程中有常微分方程与偏微分方程的区别一样，差分方程也有同样的区别。即含有两个以上自变数的函数的偏差分的方程称为**偏差分方程**。与此相应，把仅含有一个自变数的函数的差分的方程(3.1)或(3.2)称为**常差分方程**。但对常差分方程，沒有特殊必要时，"常"字一般略去，而簡称为差分方程。

---

❶ 本式内 y 应改写为 y_x。——譯者注

当(3.1)式左边的 Φ 是 y_x 与其差分的一次式时，則(3.2)式左边的 F 是 $y_x, y_{x+1}, \cdots, y_{x+n}$ 的一次式。反之，若 F 是 $y_x, y_{x+1}, \cdots, y_{x+n}$ 的一次式，則 Φ 是 y_x 与其差分的一次式。这样的差分方程称为**綫性差分方程**。一般写作

$$\sum_{i=0}^{n} p_{xi} y_{x+i} = K_x, \tag{3.3}$$

或更詳細地写作

$$p_{x0} y_x + p_{x1} y_{x+1} + p_{x2} y_{x+2} + \cdots + p_{xn} y_{x+n} = K_x, \tag{3.4}$$

其中 p_{xi} 与 K_x 是常数，或是只含有 x 的函数。以后我們所要討論的全部限于綫性差分方程。这是因为在差分方程中，綫性差分方程在实际应用上占有重要的地位，同时只有对綫性差分方程能够作一般理論的研究。

与微分方程一样，差分方程也有阶数。(3.4)式是 n 阶差分方程。但差分方程的阶数不能用所含差分的最高阶数，或只用(3.4)式中所含的 n 值来确定，而要用差分方程中 y 的附标中的最大者如 $x+n$，与最小者如 $x+k$ 之差 $n-k$ 来规定。

例 1. $$ay_{x+2} + by_x + cy_{x-1} = K_x.$$

由 $2-(-1)=3$，所以是 3 阶差分方程。

例 2. $$\Delta^3 y_x + y_x + c = 0,$$

由于 $\Delta^3 y_x = y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x$，故上式可化为

$$y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} = -c,$$

因此是 2 阶差分方程。

§4 关于綫性差分方程的解

与微分方程的情形一样，(3.3)式或(3.4)式当 $K_x=0$ 时称为**齐次差分方程**。当 $K_x \neq 0$ 时，称为**非齐次差分方程**。

1. 齐次綫性差分方程 首先我們来考慮 n 阶齐次綫性差分方程

$$\sum_{i=0}^{n} p_{xi} y_{x+i} = 0. \tag{4.1}$$

如果我們規定 $x=k,\ k+1,\ \cdots,\ k+r$ (k 与 r 为任意整数)，则得下列 $r+1$ 个方程

$$\left.\begin{array}{l} p_{k0}y_k + p_{k1}y_{k+1} + p_{k2}y_{k+2} + \cdots + p_{kn}y_{k+n} = 0, \\ p_{k+1,0}y_{k+1} + p_{k+1,1}y_{k+2} + \cdots + p_{k+1,n}y_{k+1+n} = 0, \\ p_{k+2,0}y_{k+2} + p_{k+2,1}y_{k+3} + \cdots + p_{k+2,n}y_{k+2+n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{k+r,0}y_{k+r} + p_{k+r,1}y_{k+r+1} + \cdots + p_{k+r,n}y_{k+r+n} = 0. \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

此与(4.1)式当 x 自 $x=k$ 改变到 $x=k+r$ 是等价的。若将它作为联立方程来求 $y_k,\ y_{k+1},\ \cdots,\ y_{k+r+n}$，则由于方程有 $r+1$ 个，未知数 y_x 有 $n+r+1$ 个，所以有 n 个 y_x 可以任意选擇。而且当此 n 个 y_x 一旦选定以后，其余的 $r+1$ 个 y_x 可由 (4.2) 式解联立方程求得，并且它們应該是前面任意选定的 n 个 y_x 的一次函数。从而形如(4.1)式的 n 阶綫性差分方程的解中，很明显地要含有 n 个任意常数。这样的解叫作**一般解**。也就是綫性差分方程一般有无穷个解（严格的說有 ∞^n 个）。

这无穷个一般解中的任一个，都是满足方程(4.1)的一个 x 的函数，称它为差分方程的**特殊解**（簡称**特解**）。現設 $\eta(x)$ 为方程(4.1)的一个特解，以任意常数 C 乘之，則 $C\eta(x)$ 仍滿足(4.1)式。也就是 $C\eta(x)$ 也是 (4.1) 式的特解。因此若 $\eta_1(x),\ \eta_2(x),\ \eta_3(x),\ \cdots,\ \eta_n(x)$ 为其 n 个特解，$C_1,\ C_2,\ C_3,\ \cdots,\ C_n$ 为 n 个任意常数，則(4.1)式的一般解可以表示成下列形式：

$$y_x = C_1\eta_1(x) + C_2\eta_2(x) + \cdots + C_n\eta_n(x). \tag{4.3}$$

为了使(4.3)的 y_x 成为(4.1)的一般解，其中的 n 个特解必須是"綫性无关"的。

这可解釋如下。例如，若某两个特解 η_i 与 η_k 間存在着綫性关系

$$a\eta_i + b\eta_k = 0,$$

則一般解中的 $C_i\eta_i+C_k\eta_k$ 化为

$$C_i\eta_i+C_k\eta_k=\left(C_i-\frac{a}{b}C_k\right)\eta_i,$$

其中括号内的 $C_i-\frac{a}{b}C_k$ 可以看作一个任意常数，从而在一般解中所含有的任意常数是 $n-1$ 个而不是 n 个。

若 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \cdots, \eta_n$ 是綫性相关的，則它們之間存在着关系式：

$$a_1\eta_1(x)+a_2\eta_2(x)+\cdots+a_n\eta_n(x)=0, \tag{4.4}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是任意常数，可以是零但不能全部都是零。

由此若取 $x=x, x+1, \cdots, x+n-1$，則得 n 个一次齐次方程：

$$a_1\eta_1(x)+a_2\eta_2(x)+\cdots+a_n\eta_n(x)=0,$$
$$a_1\eta_1(x+1)+a_2\eta_2(x+1)+\cdots+a_n\eta_n(x+1)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1\eta_1(x+n-1)+a_2\eta_2(x+n-1)+\cdots+a_n\eta_n(x+n-1)=0.$$

将它作为关于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的联立方程，則当

$$D(x)=\begin{vmatrix} \eta_1(x) & \eta_2(x) & \cdots & \eta_n(x) \\ \eta_1(x+1) & \eta_2(x+1) & \cdots & \eta_n(x+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_1(x+n-1) & \eta_2(x+n-1) & \cdots & \eta_n(x+n-1) \end{vmatrix}\neq 0 \tag{4.5}$$

时，$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 全部为零。也就是 (4.4) 式不成立。若 $D(x)=0$，則 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 一般可取不全为零的有限值，从而綫性关系 (4.4) 成立。所以要使 n 个特解彼此綫性无关，必須对于任何 x (4.5) 式成立。这 n 个彼此互相独立的特解組叫作**基本解**。

一般，n 阶綫性差分方程不能有多于 n 个綫性无关的特解。

原因是除上述 n 个基本解之外，若还有另外一个特解 $\eta'(x)$，将 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 与 η' 代入(4.1)式中，則有下列 $n+1$ 个方程：

$$p_{x0}\eta_1(x)+p_{x1}\eta_1(x+1)+\cdots+p_{xn}\eta_1(x+n)=0,$$
$$p_{x0}\eta_2(x)+p_{x1}\eta_2(x+1)+\cdots+p_{xn}\eta_2(x+n)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_{x0}\eta_n(x)+p_{x1}\eta_n(x+1)+\cdots+p_{xn}\eta_n(x+n)=0,$$
$$p_{x0}\eta'(x)+p_{x1}\eta'(x+1)+\cdots+p_{xn}\eta'(x+n)=0.$$

由于系数 p 不能全部为零，所以只有

$$\begin{vmatrix} \eta_1(x) & \eta_1(x+1) & \cdots & \eta_1(x+n) \\ \eta_2(x) & \eta_2(x+1) & \cdots & \eta_2(x+n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_n(x) & \eta_n(x+1) & \cdots & \eta_n(x+n) \\ \eta'(x) & \eta'(x+1) & \cdots & \eta'(x+n) \end{vmatrix}=0,$$

而这意味着 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 与 η' 間存在着如前面所說的綫性关系，从而 η' 不能是与 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 綫性无关的特解。所以不存在多于 n 个綫性无关的特解。

由此可見，形成 n 阶綫性差分方程基本解的彼此綫性无关的特解的个数等于 n，既不多于 n 也不少于 n。

2. 非齐次綫性差分方程 其次考虑非齐次差分方程：

$$\sum_{i=0}^{n} p_{xi} y_{x+i}=K_x, \tag{4.6}$$

設 $\eta_0(x)$ 为方程的已知特解，z_x 为 x 的函数，設(4.6)式的一般解为

$$y_x=\eta_0(x)+z_x, \tag{4.7}$$

代入(4.6)式，得到

$$\sum_{i=0}^{n} p_{xi}\eta_0(x+i)+\sum_{i=0}^{n} p_{xi} z_{x+i}=K_x.$$

由于 $\eta_0(x)$ 是滿足(4.6)式的特解，所以此式左边第一項等于 K_x，因此要使(4.7)式的 y_x 成为(4.6)式的一般解，必須

$$\sum_{i=0}^{n} p_{xi} z_{x+i}=0.$$

而这是(4.1)的齐次方程，其一般解由(4.3)式給出。这样，一方面用証明齐次方程相同的方法，可以証明 n 阶非齐次方程的一般解中含有 n 个任意常数。另一方面也証明了非齐次方程(4.6)的一般解，等于它的一个特解与使給定的非齐次方程的自由項为零所得到的齐次方程的一般解之和。也就是非齐次方程的一般解可由下式表示：

$$y_x=\eta_0(x)+C_1\eta_1(x)+C_2\eta_2(x)+\cdots+C_n\eta_n(x). \tag{4.8}$$

§5 Lagrange 变易常数法

下面将介紹使用綫性非齐次方程所对应的齐次方程的基本解来导求綫性非齐次方程的特解的方法。此方法叫作 Lagrange 变易常数法。

将 n 阶非齐次綫性方程(4.6)式中 y_{x+n} 的系数改写为1，即得

$$p_{x0}y_x+p_{x1}y_{x+1}+\cdots+p_{x,n-1}y_{x+n-1}+y_{x+n}=K_x, \tag{5.1}$$

設对应的齐次方程

$$p_{x0}y_x+p_{x1}y_{x+1}+\cdots+p_{x,n-1}y_{x+n-1}+y_{x+n}=0$$

的一般解为

$$y_x=C_1\eta_1(x)+C_2\eta_2(x)+\cdots+C_n\eta_n(x). \tag{5.2}$$

其中 η_1, η_2, …, η_n 为上述齐次方程的基本解。

将所給定的非齐次方程(5.1)式的特解表示成与(5.2)式相同的形式，即

$$y_x=c_1(x)\eta_1(x)+c_2(x)\eta_2(x)+\cdots+c_n(x)\eta_n(x). \tag{5.3}$$

它与(5.2)式的差别是 $c_1(x)$, $c_2(x)$, …, $c_n(x)$ 不是常数，而是 x 的函数。

我們若将(5.3)式代入(5.1)式，則仅仅得到一个式子，而不能规定 n 个 $c_1(x)$, $c_2(x)$, …. 为了得到其余的 $n-1$ 个条件，我們规定 y 自 y_{x+1} 到 y_{x+n-1} 有下列 $n-1$ 个关系成立，即

$$\left.\begin{aligned}
y_{x+1}&=c_1(x)\eta_1(x+1)+c_2(x)\eta_2(x+1)+\cdots\\
&\quad+c_n(x)\eta_n(x+1),\\
y_{x+2}&=c_1(x)\eta_1(x+2)+c_2(x)\eta_2(x+2)+\cdots\\
&\quad+c_n(x)\eta_n(x+2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_{x+n-1}&=c_1(x)\eta_1(x+n-1)+c_2(x)\eta_2(x+n-1)\\
&\quad+\cdots+c_n(x)\eta_n(x+n-1).
\end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

这意味着 $c_1(x)$, $c_2(x)$, … 保持不变而 (5.3) 式对于 y 自 y_x 到 y_{x+n-1} 都成立。然而 $c_1(x)$, $c_2(x)$, … 是 x 的函数。設 (5.3) 式对 y_{x+1} 适用，則

$$y_{x+1}=c_1(x+1)\eta_1(x+1)+c_2(x+1)\eta_2(x+1)+\cdots+c_n(x+1)\eta_n(x+1),$$

从而为了使 (5.4) 式中第一式成立，由

$$c_i(x+1)-c_i(x)=\Delta c_i(x),$$

必須

$$\Delta c_1(x)\eta_1(x+1)+\Delta c_2(x)\eta_2(x+1)+\cdots+\Delta c_n(x)\eta_n(x+1)=0. \qquad (5.5_1)$$

而且当此式成立时，(5.4) 中第一式成立。現設 (5.4) 中第一式适用于 y_{x+2}，則

$$y_{x+2}=c_1(x+1)\eta_1(x+2)+c_2(x+1)\eta_2(x+2)+\cdots+c_n(x+1)\eta_n(x+2),$$

为了使 (5.4) 的第二式成立，必須

$$\Delta c_1(x)\eta_1(x+2)+\Delta c_2(x)\eta_2(x+2)+\cdots+\Delta c_n(x)\eta_n(x+2)=0. \qquad (5.5_2)$$

这样，为了使 (5.4) 成立，显然必須依次有

$$\Delta c_1(x)\eta_1(x+n-1)+\Delta c_2(x)\eta_2(x+n-1)+\cdots+\Delta c_n(x)\eta_n(x+n-1)=0. \qquad (5.5_{n-1})$$

最后，設 (5.4) ❶ 最后一式适用于 y_{x+n}，由 $c_i(x+1)=c_i(x)+\Delta c_i(x)$ 得到

$$y_{x+n}=[c_1(x)+\Delta c_1(x)]\eta_1(x+n)+[c_2(x)+\Delta c_2(x)]\eta_2(x+n)+\cdots+[c_n(x)+\Delta c_n(x)]\eta_n(x+n), \qquad (5.6)$$

将 (5.3), (5.4), (5.6) 的 y_x, y_{x+1}, …, y_{x+n} 代入方程 (5.1) 进行整理，則得

❶ 原文誤为 (5.5)。——譯者注

$$c_1(x)[p_{x0}\eta_1(x)+\cdots+p_{x,n-1}\eta_1(x+n-1)+\eta_1(x+n)]$$
$$+c_2(x)[p_{x,0}\eta_2(x)+\cdots+p_{x,n-1}\eta_2(x+n-1)+\eta_2(x+n)]$$
$$+\cdots+\Delta c_1(x)\eta_1(x+n)+\Delta c_2(x)\eta_2(x+n)+\cdots$$
$$+\Delta c_n(x)\eta_n(x+n)=K_x.$$

然而 η_1, η_2, η_3, $\cdots$ 是齐次方程的特解，所以上式中 $c_1(x)$, $c_2(x)$, $\cdots$的系数全部等于零。从而可得

$$\Delta c_1(x)\eta_1(x+n)+\Delta c_2(x)\eta_2(x+n)+\cdots$$
$$+\Delta c_n(x)\eta_n(x+n)=K_x. \tag{5.7}$$

这样，可由(5.5)得到 $n-1$ 个 $\Delta c_i(x)$ 的一次方程；由(5.7)得到一个 $\Delta c_i(x)$ 的一次方程，合計为 n 个一次方程。解此联立方程，卽可定出 $\Delta c_1(x)$, $\Delta c_2(x)$, $\cdots$.

为了使定出 $\Delta c_1(x)$, $\Delta c_2(x)$, $\cdots$成为可能，有必要証明行列式

$$D(x+1)=\begin{vmatrix}\eta_1(x+1) & \eta_2(x+1) & \cdots & \eta_n(x+1)\\ \eta_1(x+2) & \eta_2(x+2) & \cdots & \eta_n(x+2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \eta_1(x+n) & \eta_2(x+n) & \cdots & \eta_n(x+n)\end{vmatrix}\neq 0.$$

但是，由于 η_1, η_2,$\cdots$是彼此綫性无关的特解，所以由(4.5)式显然有 $D(x+1)\neq 0$.

由(5.5)和(5.7)式的 n 个方程解 $\Delta c_i(x)$, 則 $\Delta c_i(x)$ 可表示为

$$\Delta c_i(x)=K_x\mu_i(x). \tag{5.8}$$

其中 $\mu_i(x)$ 是行列式 $D(x+1)$ 关于它的最下行 $\eta_i(x+n)$ 的代数余子式。由是，

$$c_i(x)=\sum K_x\mu_i(x)\Delta x, \tag{5.9}$$

代入(5.3)式，則所給的非齐次方程的特解可以表示成

$$y_x=\sum_{i=1}^{n}\eta_i(x)\sum K_x\mu_i(x)\Delta x, \tag{5.10}$$

其一般解是此式与(5.2)式的和。

以上的变易常数法，当 K_x 所給的形式不是 x 的函数，而是一个个的数值时，也可以使用。只不过此时的和分是求单純的和。

第3章 常系数綫性差分方程

§6 齐 次 方 程

能簡单求得一般解的綫性差分方程是不多的，但在实际問題中有广泛应用的常系数方程确是可簡单地求得一般解的。在我們考慮非齐次方程之前，先就齐次方程的一般解加以說明。

在綫性齐次差分方程 (4.1) 式中，将全部系数 p_{xi} 取为与 x 无关的常数，并以 a_i 表之，則

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_{x+i} \equiv a_0 y_x + a_1 y_{x+1} + \cdots + a_n y_{x+n} = 0. \qquad (6.1)$$

为了求它的解，我們引入参数 λ. 令

$$y_x = \lambda^x, \qquad (6.2)$$

将它代入上式，則得

$$a_0 \lambda^x + a_1 \lambda^{x+1} + \cdots + a_n \lambda^{x+n} = 0,$$

消去公共因子 λ^x，得出

$$\varphi(\lambda) \equiv a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \cdots + a_n \lambda^n = 0. \qquad (6.3)$$

这說明要使 (6.2) 成为 (6.1) 式的解，λ 必須滿足(6.3)式。(6.3) 式叫做給定的差分方程 (6.1) 式的**特征方程**，λ 为它的根。

今設 $a_n \neq 0$，則 (6.3) 式一般有 n 个不为零的根，設为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，則所求的特解是

$$y_x = \lambda_i^x \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \qquad (6.4)$$

若用此 n 个特解作出行列式 (4.5)，則

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^x & \lambda_2^x & \cdots & \lambda_n^x \\ \lambda_1^{x+1} & \lambda_2^{x+1} & \cdots & \lambda_n^{x+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{x+n-1} & \lambda_2^{x+n-1} & \cdots & \lambda_n^{x+n-1} \end{vmatrix} = (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n)^x \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)^x\prod_{i,k}(\lambda_i-\lambda_k)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1;\ k=2,\ 3,\ \cdots,\ n;\ i<k).$$

当(6.3)的 n 个根彼此不相等,即 $\lambda_i-\lambda_k\neq 0$ 时,上面的行列式不为零。于是(6.4)的 n 个特解成为給定方程的基本解。故一般解由下式給出:

$$y_x=C_1\lambda_1^x+C_2\lambda_2^x+\cdots+C_n\lambda_n^x. \tag{6.5}$$

特征方程的 n 个根中,若有重根,則上述行列式为零,从而(6.4)的 n 个特解不为基本解。对这种情形,例如 λ_k 是重根,将它乘以新的 x 的函数 u_x,并将 $y_x=\lambda_k^x u_x$ 代入給定方程进行整理,即得

$$\begin{aligned}&[a_0+a_1\lambda_k+a_2\lambda_k^2+\cdots+a_n\lambda_k^n]\lambda_k^x u_x\\&\quad+[a_1+2a_2\lambda_k+3a_3\lambda_k^2+\cdots+na_n\lambda_k^{n-1}]\lambda_k^{x+1}\Delta u_x\\&\quad+[2a_2+3\cdot 2a_3\lambda_k+\cdots+n(n-1)a_n\lambda_k^{n-2}]\lambda_k^{x+2}\Delta^2u_x/2!\\&\quad+\cdots+n(n-1)\cdots 2\cdot 1a_n\lambda_k^{x+n}\Delta^n u_x/n!=0.\end{aligned}$$

然而上式第一項的方括号中的多項式是特征方程 $\varphi(\lambda_k)$,第二項以后的方括号中的多項式是 $\varphi'(\lambda_k)$, $\varphi''(\lambda_k)$, $\cdots$. 所以从上式中消去公共因子 λ_k^x 后得到

$$\varphi(\lambda_k)u_x+\frac{1}{1!}\varphi'(\lambda_k)\lambda_k\Delta u_x+\frac{1}{2!}\varphi''(\lambda_k)\lambda_k^2\Delta^2u_x+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\lambda_k)\lambda_k^n\Delta^n u_x=0.$$

設 λ_k 是 $\varphi(\lambda)=0$ 的 m 重根,則

$$\varphi(\lambda_k)=0,\ \varphi'(\lambda_k)=\varphi''(\lambda_k)=\cdots=\varphi^{(m-1)}(\lambda_k)=0,$$

此时上式化为

$$\frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(\lambda_k)\lambda_k^m\Delta^m u_x+\cdots+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\lambda_k)\lambda_k^n\Delta^n u_x=0,$$

显然,若 u_x 是一个最高次項为 x^{m-1} 的 x 的有理整函数,則 u_x 滿足此方程。所以,若

$$u_x=C_1+C_2x+C_3x^2+\cdots+C_mx^{m-1},$$

則 λ_k^x 乘以 u_x 是一特解,从而所給定的差分方程的一般解可以表示成

$$y_x=(C_1+C_2x+C_3x^2+\cdots+C_mx^{m-1})\lambda_k^x+C_{m+1}\lambda_{m+1}^x+\cdots+C_n\lambda_n^x. \tag{6.6}$$

若特征方程具有复根(方程的系数为实数),則根据复根必成对出現,所

以通过結合可以作成实函数。例如 $\lambda_1=a+bi$, $\lambda_2=a-bi$ 是一对共軛复根，則取

$$\rho=|\sqrt{a^2+b^2}|,\quad \tan\varphi=b/a,$$

从而

$$\lambda_1=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad \lambda_2=\rho(\cos\varphi-i\sin\varphi),$$

因而一般解 y_x 中的 $C_1\lambda_1^x+C_2\lambda_2^x$ 可写成

$$C_1\lambda_1^x+C_2\lambda_2^x=\rho^x[(C_1+C_2)\cos\varphi x+i(C_1-C_2)\sin\varphi x],$$

由于 C_1, C_2 是任意常数，所以 C_1+C_2 与 $(C_1-C_2)i$ 仍是任意常数，以 C_1', C_2' 表之，由是

$$C_1\lambda_1^x+C_2\lambda_2^x=C_1'\rho^x\cos\varphi x+C_2'\rho^x\sin\varphi x,\tag{6.7}$$

这样我們就得到含有两个实函数的特解。

最后，若特征方程的根中有 m 重复根，則显然一般解 y_x 可以表示成

$$y_x=(C_1+C_2x+\cdots+C_mx^{m-1})\rho^x\cos\varphi x$$
$$+(C_{m+1}+C_{m+2}x+\cdots+C_{2m}x^{m-1})\rho^x\sin\varphi x+\cdots.\tag{6.8}$$

2 阶的情形 在实际問題中常出現 2 阶方程。現在我們来考虑常系数 2 阶齐次方程

$$ay_{x-1}+2by_x+cy_{x+1}=0.\tag{6.9}$$

其特征方程 $a+2b\lambda+c\lambda^2=0$ 的根为

$$\lambda_1,\ \lambda_2=(-b\pm\sqrt{b^2-ac})/c,$$

故一般解为

$$y_x=C_1\lambda_1^x+C_2\lambda_2^x.\tag{6.10}$$

若 $b^2-ac>0$, 則 λ_1, λ_2 是实根。此时一般解可以表示成指数函数或双曲函数。若取

$$\rho=\sqrt{a/c},\quad \cosh\varphi=-b/(c\rho)$$

(其中 $\sqrt{a/c}$ 的符号的选取要使 $\cosh\varphi$ 为正值)，則

$$\lambda_1=\rho e^{\varphi},\quad \lambda_2=\rho e^{-\varphi},$$

代入(5.10)式，得到

$$y_x=\rho^x(C_1e^{\varphi x}+C_2e^{-\varphi x}).\tag{6.11}$$

若取 A, B 为任意常数，則上式也可以写成

$$y_x=\rho^x(A\sinh\varphi x+B\cosh\varphi x). \tag{6.12}$$

若 $b^2-ac=0$，则 $\lambda_1=\lambda_2$ 为二重根，由(6.6)式，一般解为

$$y_x=(A+Bx)\lambda_1^x=(A+Bx)\left(-\frac{b}{c}\right)^x. \tag{6.13}$$

若 $b^2-ac<0$，则 λ_1, λ_2 是共轭复根，由前面所說的，令

$$\tan\varphi=(\sqrt{ac-b^2})/(-b) \quad 即 \quad \cos\varphi=-b/(\rho c),$$

$$\rho=\left|\sqrt{\frac{ac-b^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}}\right|=\left|\sqrt{\frac{a}{c}}\right|,$$

于是从(6.7)式，得到

$$y_x=\rho^x(A\sin\varphi x+B\cos\varphi x). \tag{6.14}$$

例1. 对于首項为0，次項为1，第3項及以后各項等于前两項的和的級数：0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, …，将首項取作第0項，試求第 x 項。

設将第 x 項取作 y_x，则由題意 $y_x=y_{x-1}+y_{x-2}$，也就是 y_x 滿足2阶齐次差分方程：

$$y_x-y_{x-1}-y_{x-2}=0,$$

它的特征方程是

$$\lambda^2-\lambda-1=0,$$

其二根为

$$\lambda_1,\ \lambda_2=(1\pm\sqrt{5})/2,$$

从而

$$y_x=C_1[(1+\sqrt{5})/2]^x+C_2[(1-\sqrt{5})/2]^x.$$

由初始条件

$$x=0:\ y_0=0;\quad x=1:\ y_1=1$$

可以定出

$$C_1=1/\sqrt{5},\quad C_2=-1/\sqrt{5},$$

于是

$$y_x=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right].$$

由于 x 是正整数，所以上式右边的两項可按二項式定理展开，加以整理后得到：当 x 为偶数时，

$$y_x=\frac{1}{2^{x-1}}\left[\binom{x}{1}+5\binom{x}{3}+5^2\binom{x}{5}+\cdots+5^{\frac{x-2}{2}}\binom{x}{x-1}\right],$$

当 x 为奇数时，

$$y_x=\frac{1}{2^{x-1}}\left[\binom{x}{1}+5\binom{x}{3}+5^2\binom{x}{5}+\cdots+5^{\frac{x-1}{2}}\binom{x}{x}\right],$$

故不論 x 为奇为偶，y_x 恒为正整数。例如当 $x=10$ 时，$y_x=55$.

例 2. 求 3 阶方程：$y_{x+3}+y_x=0$ 的一般解。

由于特征方程 $\lambda^3+1=0$ 的根是

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2,\lambda_3=\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3}),$$

所以由(6.7)❶式，令 $a=1/2$，$b=\sqrt{3}/2$，则 $\rho=|\sqrt{a^2+b^2}|=1$，$\tan\varphi=b/a=\sqrt{3}$，$\varphi=\pi/3$，一般解是

$$y_x=C_1(-1)^x+C_2\cos\frac{\pi x}{3}+C_3\sin\frac{\pi x}{3}.$$

§7 对称型齐次方程

当 2 阶齐次方程(6.9)式的 y_{x-1} 与 y_{x+1} 的系数相等时，则成为对称型的方程，一般可以表示成

$$y_{x+1}+2by_x+y_{x-1}=0. \tag{7.1}$$

它的特征方程的根是

$$\lambda_1=-b+\sqrt{b^2-1},\quad \lambda_2=-b-\sqrt{b^2-1},$$

由于 $\lambda_1\cdot\lambda_2=1$，为了簡单起見，可以取 $\lambda_1=\lambda$，$\lambda_2=\lambda^{-1}$，則一般解为

$$y_x=A\lambda^x+B\lambda^{-x}. \tag{7.2}$$

其中 AB 为任意常数。

特别当 $b=\pm1$ 时，$\lambda_1=\lambda_2=\mp1$ 为重根，由(6.13)式，y_x 取下列形式：

$$\left.\begin{aligned}&\text{当 } b=1 \text{ 时，}\quad y_x=(A+Bx)(-1)^x,\\&\text{当 } b=-1 \text{ 时，}\quad y_x=A+Bx.\end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

前面已經說过，(7.2) 的解可以用指数函数，双曲函数或三角函数来表示。今設

❶ 原书誤为(5.7)。——校者注

$$y_x = Ae^{\varphi x} + Be^{-\varphi x}, \tag{7.4}$$

或

$$y_x = A\sinh\varphi x + B\cosh\varphi x, \tag{7.5}$$

直接代入(7.1)式，则得关于 φ 的特征方程

$$2(\cosh\varphi + b) = 0. \tag{7.6}$$

一般，有两个 φ 值满足这个方程，設为 φ_1 与 φ_2，則因 $\varphi_2 = -\varphi_1$，所以取 φ 为 φ_1 与 φ_2 中任何一个，例如取其中的正值，就得到方程的解。

当 $|b| < 1$ 时，(7.6)式的根是虚数。此时若取

$$y_x = A\sin\varphi x + B\cos\varphi x, \tag{7.7}$$

則 φ 是实数。将(7.7)式直接代入(7.1)式，則得确定 φ 的特征方程：

$$2(\cos\varphi + b) = 0. \tag{7.8}$$

此方程有二根 φ_1，φ_2，且 $\varphi_2 = -\varphi_1$，可以取 φ 为其中任何一个，例如取 φ 为其中的正值，即得方程的解。

最后介紹关于差分方程的运算。将

$$y_{x+1} + 2b_1 y_x + y_{x-1}$$

用記号 $(\Delta + 2b_1)y_x$ 表之，再对它作关于 $(\Delta + 2b_2)$ 的运算，则

$$\begin{aligned}
&(\Delta + 2b_2)(\Delta + 2b_1)y_x \\
&\quad = (y_{x+2} + 2b_1 y_{x+1} + y_x) + 2b_2(y_{x+1} + 2b_1 y_x + y_{x-1}) \\
&\qquad + (y_x + 2b_1 y_{x-1} + y_{x-2}) \\
&\quad = y_{x+2} + 2(b_1 + b_2)y_{x+1} + 2(2b_1 b_2 + 1)y_x \\
&\qquad + 2(b_1 + b_2)y_{x-1} + y_{x-2},
\end{aligned}$$

这是4阶对称型差分方程。它与运算顺序无关，亦即对 $(\Delta + 2b_2)y_x$ 进行 $(\Delta + 2b_1)$ 的运算可得相同的結果。

反复进行以上的运算，一般，

$$(\Delta + 2b_1)(\Delta + 2b_2)\cdots(\Delta + 2b_m)y_x = 0 \tag{7.9}$$

表示 $2m$ 阶对称型差分方程。反之，$2m$ 阶对称型差分方程：

$$\sum_{i=0}^{m} a_i(y_{x+i}+y_{x-i})=0 \tag{7.10}$$

也可以表示成(7.9)的形式。

在这里我們首先考虑4阶方程

$$(\Delta+2b_2)(\Delta+2b_1)y_x=0.$$

对于这一方程，很明显，满足 $(\Delta+2b_1)y_x=0$ 的解也同样满足此4阶方程。原因是对于满足 $(\Delta+2b_1)y_x=0$ 的解，

$$y_{x+2}+2b_1y_{x+1}+y_x,\quad y_{x+1}+2b_1y_x+y_{x-1},\quad y_x+2b_1y_{x-1}+y_{x-2}$$

都等于零。与此相同，$(\Delta+2b_2)y_x=0$ 的解也同样满足上述4阶方程。

同理。m 个2阶差分方程：

$$(\Delta+2b_1)y_x=0,\ (\Delta+2b_2)y_x=0,\ \cdots,\ (\Delta+2b_m)y_x=0$$

的解都满足 $2m$ 阶差分方程(7.9)，設这些2阶方程的特征方程的根为

$$\lambda_1,\ \lambda_1^{-1};\ \lambda_2,\ \lambda_2^{-1};\ \lambda_3,\ \lambda_3^{-1};\ \cdots;\ \lambda_m,\ \lambda_m^{-1},$$

則(7.9)式的一般解是

$$y_x=\sum_{i=1}^{m}(A_i\lambda_i^x+B_i\lambda_i^{-x}). \tag{7.11}$$

由于2阶差分方程的解也可写成(6.11)式或(6.12)式，所以方程(7.9)的一般解也可以是

$$y_x=\sum_{i=1}^{m}[A_i\exp(\varphi_ix)+B_i\exp(-\varphi_ix)], \tag{7.12}$$

或

$$y_x=\sum_{i=1}^{m}(A_i\sinh\varphi_ix+B_i\cosh\varphi_ix). \tag{7.13}$$

我們很容易証明：这些 φ_i 的特征方程，就(7.9)式来說是

$$2^m(\cosh\varphi_1+b_1)(\cosh\varphi_2+b_2)\cdots(\cosh\varphi_m+b_m)=0, \tag{7.14}$$

而就(7.10)式来說是

$$2\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \cosh i\varphi\right)=0. \tag{7.15}$$

又若取

$$y_x=\sum_{i=1}^{m}(A_i \sin\varphi_i x+B_i \cos\varphi_i x), \tag{7.16}$$

則对这种 φ_i 的特征方程，是将(7.14)或(7.15)式中的 cosh 全部換成 cos 所得的方程。

§8 非齐次方程

由于非齐次方程的一般解是它的一个特解再加上齐次方程的一般解，所以在解非齐次方程的过程中，求出它的特解是很必要的。

今給定 n 阶非齐次方程:

$$a_0y_x+a_1y_{x+1}+a_2y_{x+2}+\cdots+a_ny_{x+n}=K_x. \tag{8.1}$$

在§9中將說明当自由項 K_x 是某些特殊的函数时，我們能够簡单地求得它的特解。在其他的情况下，一般可以用§5所說的 Lagrange 变易常数法求它的特解。

也就是：我們若設(8.1)式所对应的齐次方程(6.1)的基本解为 $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$, $\cdots$, $\eta_n(x)$，又若特征方程:

$$\varphi(\lambda)\equiv a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_n\lambda^n=0 \tag{8.2}$$

的 n 个根是 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n、那么由前面所說的

$$\eta_i(x)=\lambda_i^x \quad (i=1, 2, 3, \cdots, n). \tag{8.3}$$

今設(8.1)的特解如(5.3)式:

$$\eta_0(x)=c_1(x)\eta_1(x)+c_2(x)\eta_2(x)+\cdots+c_n(x)\eta_n(x). \tag{8.4}$$

为了确定此 n 个函数 $c_i(x)$，由(5.5)和(5.7)式得到下列 n 个式子

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_1^{x+r}\Delta c_1(x)+\lambda_2^{x+r}\Delta c_2(x)+\cdots+\lambda_n^{x+r}\Delta c_n(x)=0\\ (r=1, 2, \cdots, n-1),\\ \lambda_1^{x+n}\Delta c_1(x)+\lambda_2^{x+n}\Delta c_2(x)+\cdots+\lambda_n^{x+n}\Delta c_n(x)=K_x.\end{array}\right\} \tag{8.5}$$

由这 n 个方程解出 n 个 $\Delta c_i(x)$，从而由

$$c_i(x)=\mathfrak{S}\,\Delta c_i(x)\,\Delta x \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{8.6}$$

决定 $c_i(x)$，然后再由(8.4)式即可确定特解 $\eta_0(x)$.

但是，若特征方程(8.2)的根中沒有重根，則可应用下列方法直接求得 $c_i(x)$，而不必解联立方程(8.5)。

将(8.2)的左边除以 $\lambda-\lambda_i$，則得 $n-1$ 次多項式

$$\varphi_i(\lambda)\equiv\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda-\lambda_i}=A_0+A_1\lambda+A_2\lambda^2+\cdots+A_{n-1}\lambda^{n-1}.$$

其中 $A_{n-1}=a_n$. 将 $A_0,\ A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{n-1}$ 依次乘(8.5)各式然后全部相加，則得

$$\Delta c_1(x)\lambda_1^{x+1}\varphi_i(\lambda_1)+\Delta c_2(x)\lambda_2^{x+1}\varphi_i(\lambda_2)+\cdots$$
$$+\Delta c_i(x)\lambda_i^{x+1}\varphi_i(\lambda_i)+\cdots+\Delta c_n(x)\lambda_n^{x+1}\varphi_i(\lambda_n)=a_nK_x.$$

由于

$$\varphi_i(\lambda)=a_n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_{i-1})(\lambda-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda-\lambda_n),$$

所以对于除去 λ_i 以外的根 λ, $\varphi_i(\lambda)$ 全部等于零。又若設 $\varphi(\lambda)$ 关于 λ 的导数为 $\varphi'(\lambda)$，則由于 $\varphi_i(\lambda_i)=\varphi'(\lambda_i)$，所以上式变成

$$\Delta c_i(x)\lambda_i^{x+1}\varphi'(\lambda_i)=a_nK_x.$$

故

$$\Delta c_i(x)=\frac{a_nK_x}{\lambda_i^{x+1}\varphi'(\lambda_i)}, \tag{8.7}$$

$$c_i(x)=\frac{a_n}{\lambda_i\varphi'(\lambda_i)}\mathfrak{S}\frac{K_x}{\lambda_i^x}\Delta x. \tag{8.8}$$

于是所求的特解是

$$\eta_0(x)=a_n\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^{x-1}}{\varphi'(\lambda_i)}\mathfrak{S}\frac{K_x}{\lambda_i^x}\Delta x, \tag{8.9}$$

将此特解与齐次方程的一般解相加，則得一般解。

例1. 試求常系数1阶差分方程：

$$y_{x+1}-ay_x=K_x \tag{8.10}$$

的解。

由于特征方程 $\lambda-a=0$ 只有一个根 $\lambda=a$，从而由所对应的齐次方程給出方程的一般解的形状为

$$y_x=Ca^x+c(x)a^x.$$

为了确定 $c(x)$，我們在(8.5)式中取 $n=1$，則

$$\lambda^{x+1}\Delta c(x)=K_x \text{ 或 } \Delta c(x)=K_x/a^{x+1}.$$

故

$$c(x)=\mathop{\mathbb{S}}\frac{K_x}{a^{x+1}}\Delta x,$$

而

$$y_x=Ca^x+a^{x-1}\mathop{\mathbb{S}}\frac{K_x}{a^x}\Delta x. \tag{8.11}$$

(8.11)式中的和分在解析上是否可能，要由 K_x 来决定。例如当

$$K_x=b^x$$

时，由于

$$\Delta a^x=a^{x+1}-a^x=(a-1)a^x,$$

所以

$$\mathop{\mathbb{S}}a^x\Delta x=\frac{a^x}{a-1}.$$

故

$$\mathop{\mathbb{S}}\frac{b^x}{a^x}\Delta x=\mathop{\mathbb{S}}\left(\frac{b}{a}\right)^x\Delta x=\left(\frac{b}{a}\right)^x\Big/\left(\frac{b}{a}-1\right),$$

于是

$$y_x=Ca^x+\frac{b^x}{b-a}. \tag{8.12}$$

然而此結果当 $b=a$ 时不成立。但是，在这种情况下，由

$$\mathop{\mathbb{S}}\frac{b^x}{a^x}\Delta x=\mathop{\mathbb{S}}\Delta x=x,$$

即得

$$y_x=Ca^x+xa^{x-1}=(Ca+x)a^{x-1}. \tag{8.13}$$

例2. 試求2阶方程：

$$y_{x+2}+4y_{x+1}+y_x=b^x \tag{8.14}$$

的一般解。

由于

$$\varphi(\lambda)=\lambda^2+4\lambda+1,\quad \varphi'(\lambda)=2\lambda+4=2(\lambda+2),$$

$\varphi(\lambda)=0$ 的根是

$$\lambda_1,\ \lambda_2=-2\pm\sqrt{3}.$$

所以由(8.8)式，

$$c_1(x)=\frac{1}{2\lambda_1(\lambda_1+2)}\mathop{S}\frac{b^x}{\lambda_1^x}\Delta x,$$

$$c_2(x)=\frac{1}{2\lambda_2(\lambda_2+2)}\mathop{S}\frac{b^x}{\lambda_2^x}\Delta x.$$

与上例一样地求这两个和分，即得

$$c_1(x)=\frac{1}{2\sqrt{3}(b-\lambda_1)}\left(\frac{b}{\lambda_1}\right)^x,\quad c_2(x)=-\frac{1}{2\sqrt{3}(b-\lambda_2)}\left(\frac{b}{\lambda_2}\right)^x.$$

从而所給定的方程的特解是

$$\eta_0(x)=c_1(x)\lambda_1^x+c_2(x)\lambda_2^x=\frac{b^x}{2\sqrt{3}(b-\lambda_1)}-\frac{b^x}{2\sqrt{3}(b-\lambda_2)}$$

$$=\frac{b^x}{b^2+4b+1},$$

故一般解是

$$y_x=C_1\lambda_1^x+C_2\lambda_1^{-x}+\frac{b^x}{b^2+4b+1}. \tag{8.15}$$

§9 特殊的非齐次方程的特解

当非齐次方程(8.1)的自由项 K_x 是某些特殊的函数时，我們可以不使用 §8 中的常数变易法而能比較簡单地求出特解。

1. 当 $K_x=b^xf(x)$ 时 这里的 b 是常数，$f(x)$ 是 x 的 m 次有理整函数。在这种情形下，特解一般取下面的形式：

$$\eta_0(x)=b^xu(x). \tag{9.1}$$

其中 $u(x)$ 是与 $f(x)$ 同次的有理整函数。現若将它代入(8.1)式，則得

$$a_0u(x)+a_1bu(x+1)+\cdots+a_nb^nu(x+n)=f(x), \tag{9.2}$$

由于此式的左边与 $f(x)$ 是同次(m 次)的有理整函数，所以左边若

按 x 的幂整理，则由各项的系数等于 $f(x)$ 的对应项的系数，从而可以全部决定出 $u(x)$ 的系数。

但是若 b 是特征方程

$$\varphi(\lambda)\equiv a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_n\lambda^n=0$$

的根时，上述方法不能使用。

理由： 将 $b^x u(x)$ 代入方程 (8.1)，并将 $u(x+1)$，$u(x+2)$，… 用 $u(x)$，$\Delta u(x)$，$\Delta^2 u(x)$，…表示，整理 $\Delta(x)$，$\Delta u(x)$，$\Delta^2 u(x)$，…各项，则与 §6 一样将出現

$$\varphi(b)u(x)+b\varphi'(b)\Delta u(x)+b^2\varphi''(b)\Delta^2 u(x)/2!+\cdots$$
$$+b^n\varphi^{(n)}(b)\Delta^n u(x)/n!=f(x). \quad (9.3)$$

若 b 是 $\varphi(\lambda)=0$ 的根，则 $\varphi(b)=0$，因此为了使 (9.3) 式成立，$u(x)$ 的次数必須是 $m+1$，因为，这样 $\Delta u(x)$ 才与 $f(x)$ 同次（m 次）。

一般，若 b 是 $\varphi(\lambda)=0$ 的 r 重根，则由

$$\varphi(b)=\varphi'(b)=\varphi''(b)=\cdots\varphi^{(r-1)}(b)=0,$$

故

$$\frac{b^r}{r!}\varphi^{(r)}(b)\Delta^r u(x)+\cdots+\frac{b^n}{n!}\varphi^{(n)}(b)\Delta^n u(x)=f(x). \quad (9.4)$$

为了使此式成立，则 $u(x)$ 必須是 $m+r$ 次函数。也就是說，在这种情况下，一般应有

$$u(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_{r-1}x^{r-1}+\gamma_r x^r$$
$$+\gamma_{r+1}x^{r+1}+\cdots+\gamma_{m+r}x^{m+r}. \quad (9.5)$$

式中的 $m+1$ 个系数 γ_r，…，γ_{m+r} 是由比較 (9.4) 式两边系数来决定的，C_0，C_1，…，C_{r-1} 是任意常数。含有 C_0，…，C_{r-1} 的項，如 (6.6)❶ 式所說的，是在齐次方程的一般解 $(C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_{r-1}x^{r-1})b^x$ 中所含有的。

2. 当 $K_x=K$（常数）时 此时 $b=1$，$f(x)=K$，故可取 $u(x)=c$（常数）。将它代入 (9.2)，则

---

❶ 原书誤为 (6.5)。——校者注

$$c(a_0+a_1+\cdots+a_n)=K,\ u(x)=c=\frac{K}{a_0+a_1+\cdots+a_n}.$$

故特解

$$\eta_0(x)=u(x)=\frac{K}{a_0+a_1+\cdots+a_n}. \tag{9.6}$$

但是当 $a_0+a_1+\cdots+a_n=0$ 时，上式不成立。此时 $b=1$ 是特征方程的根。一般，当 $b=1$ 是 $\varphi(\lambda)=0$ 的 r 重根时，由于 $m=0$，所以由(9.5)式，$\eta_0=u(x)=\gamma x^r$。但由

$$\Delta^r u(x)=\gamma\Delta^r x^r=\gamma r!,$$

而 $\gamma+1$ 阶以上的差分全部为零，所以若将它代入(9.4)式，则得

$$\frac{1}{r!}\varphi^{(r)}(1)\gamma r!=K \quad 或 \quad \gamma=K/\varphi^{(r)}(1).$$

故特解是

$$\eta_0(x)=\frac{K}{\varphi^{(r)}(1)}x^r. \tag{9.7}$$

3. 当 $K_x=b^x$ 时 对这种情形，由于 $f(x)=1$，因而 $u(x)$ 是常数，設为 γ，则由(9.3)式，

$$\gamma\varphi(b)=1,\quad \gamma=1/\varphi(b),$$

$$\eta_0(x)=\frac{b^x}{\varphi(b)}. \tag{9.8}$$

利用这些，§8 的例题的特解可以立即求出。

若 b 是 $\varphi(\lambda)=0$ 的 r 重根，则 $u(x)=\gamma x^r$，与 $K_x=K$ 的情形一样，可以得到它的特解

$$\eta_0(x)=\frac{b^{x-r}x^r}{\varphi^{(r)}(b)}. \tag{9.9}$$

4. 当 K_x 是三角函数或双曲函数与有理整函数的乘积时 当 K_x 是 $b_1^x f_1(x)$，$b_2^x f_2(x)$，…之和时，由迭加原理，其特解应等于 K_x 是 $b_1^x f_1(x)$，$b_2^x f_2(x)$，…等的特解之和。然而由于三角函数及双曲函数可以改写成指数函数的形式，所以当 K_x 等于这些函数与

$f(x)$ 的乘积时，其特解显然用前面所說的方法可以求得。但是对于 $K_x=f(x)\sin ax$ 或 $f(x)\cos ax$ 时，我們令

$$\eta_0(x)=u(x)\sin ax+v(x)\cos ax, \tag{9.10}$$

对于 $K_x=f(x)\sinh ax$ 或 $f(x)\cosh ax$ 时，我們令

$$\eta_0(x)=u(x)\sinh ax+v(x)\cosh ax, \tag{9.11}$$

可以直接求出特解。其中 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是与 $f(x)$ 同次的(m 次)有理整函数。

例如 $K_x=f(x)\sin ax$，则将(9.10)式代入(8.1)得

$$a_0u(x)\sin ax+a_1u(x+1)\sin a(x+1)+\cdots$$
$$+a_0v(x)\cos ax+a_1v(x+1)\cos a(x+1)+\cdots=f(x)\sin ax,$$

引用三角公式，上式可改写成，

$$F(x)\sin ax+G(x)\cos ax=f(x)\sin ax. \tag{9.12}$$

其中 $F(x)$，$G(x)$ 是与 $f(x)$ 同次的有理整函数，由(9.12)式，得到

$$F(x)\equiv f(x),\quad G(x)\equiv 0.$$

从而可令 $F(x)$ 与 $f(x)$ 的各項系数相等，$G(x)$ 的令项系数为零，由此得到 $2(m+1)$ 个条件，可以确定出 $u(x)$ 与 $v(x)$ 所含的 $2(m+1)$ 个未知系数。

例1. 解 $y_{x+3}-13y_{x+1}+12y_x=3$.

此时特征方程是

$$\varphi(\lambda)=\lambda^3-13\lambda+12=0,$$

它的根为 1, 3, -4. 由于 $K=3$ 与其中一根相等。故取 $r=1$，用(9.7)式求特解。从

$$\varphi'(\lambda)=3\lambda^2-13,\quad \varphi'(1)=-10,$$

得到特解

$$\eta_0(x)=-\frac{3}{10}x,$$

因此一般解是

$$y_x=C_1+C_23^x+C_3(-4)^x-\frac{3}{10}x.$$

例 2. 解 $y_{x+2}+4y_{x+1}+y_x=x(x+1)$.

此时 $b=1$, $f(x)=x(x+1)$. 从 § 8 例 2 特征方程的根为

$$\lambda_1, \lambda_2=-2\pm\sqrt{3},$$

而 $b=1$ 不与它們相等。从而可設

$$\eta_0(x)=u(x)=ax^2+bx+c,$$

代入所給的方程并加以整理,則得

$$6ax^2+6(2a+b)x+2(4a+3b+3c)=x^2+x+0,$$

比较等号两边同类項的系数,得到

$$a=1/6, \quad b=-1/6, \quad c=-1/18,$$

故所給方程的一般解为

$$y_x=C_1\lambda^x+C_2\lambda^{-x}+\frac{1}{18}(3x^2-3x-1),$$

其中 λ 是 λ_1, λ_2 中的任何一个。

例 3. 解 $y_{x+1}+by_x+y_{x-1}=k\sin ax$.

为了求它的特解,根据(9.10),可設

$$\eta_0(x)=A\sin ax+B\cos ax,$$

将它代入所給的方程并进行整理,則得

$$(b+2\cos ax)(A\sin ax+B\cos ax)=k\sin ax.$$

比較两边同类項的系数,得出

$$(b+2\cos a)A=k, \quad B=0.$$

故特解是

$$\eta_0(x)=A\sin ax=\frac{k\sin ax}{b+2\cos a}.$$

加上使所給方程右边为零而得到的齐次方程的一般解,卽得所給非齐次方程的一般解。

但是,当 $b=-2\cos a$ 时,上式不再成立。这是因为在这种情形下特征方程:

$$\varphi(\lambda)\equiv\lambda^2-2\cos a\lambda+1=0$$

的根 $\lambda_1, \lambda_2=\cos a\pm i\sin a$, 也就是 $\lambda_1=e^{ia}$, $\lambda_2=e^{-ia}$, 所对应的齐次方程的一般解是

$$C_1e^{iax}+C_2e^{-iax} \text{ 或 } C_1\sin ax+C_2\cos ax,$$

从而可知前面所写的特解等于上列齐次方程的特解之一。

此时，若取

$$\eta_0(x) = Ax\sin\alpha x + Bx\cos\alpha x,$$

就可求得方程的特解。現将上述 $\eta_0(x)$ 代入所給方程，同时考虑到 $b=-2\cos\alpha$，进行整理，含有 x 的項相消，則得

$$2A\sin\alpha\cos\alpha x - 2B\sin\alpha\sin\alpha x = k\sin\alpha x,$$

从而

$$A=0,\quad B=-k/(2\sin\alpha),$$

于是

$$\eta_0(x) = -\frac{kx\cos\alpha x}{2\sin\alpha},$$

一般解是

$$y_x = C_1\sin\alpha x + \left(C_2 - \frac{kx}{2\sin\alpha}\right)\cos\alpha x.$$

§10 差分方程在結构力学上的应用

1. 連續梁

将断面一定、全部跨度 (span) 相等的連續梁 (图 10.1) 的支点 x 上的弯曲力矩取作 M_x，則有**三弯矩定理**

$$M_{x-1} + 4M_x + M_{x+1} = -K_x. \tag{10.1}$$

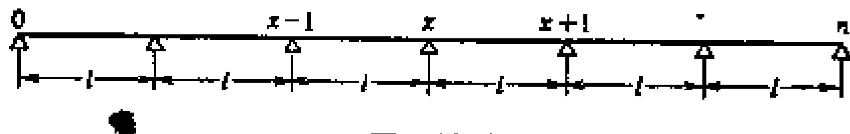


图 10.1

其中 K_x 是荷載項，其值由在支点 x 的左右的跨上所負荷載而确定。

(10.1)式所对应的齐次方程的一般解，按照 §8 或 §9 的例題的做法，是

$$M_x = C_1\lambda^x + C_2\lambda^{-x},\quad \lambda = -2+\sqrt{3}. \tag{10.2}$$

若将其加上(10.1)的特解，就得到一般解。

a) 当各跨負担相等荷載时 此时 K_x 是与 x 无关的常数 K，由(9.6)式 $\eta_0(x) = -K/6$，从而一般解

$$M_x = C_1\lambda^x + C_2\lambda^{-x} - \frac{K}{6}. \qquad (10.3)$$

其中 C_1, C_2 为任意常数，由边界条件来确定。当两端为鉸支时，$M_0=0$, $M_n=0$，所以

$$C_1 + C_2 - K/6 = 0, \quad C_1\lambda^n + C_2\lambda^{-n} - K/6 = 0.$$

故

$$C_1 = \frac{K}{6(1+\lambda^n)}, \quad C_2 = \frac{\lambda^n K}{6(1+\lambda^n)}.$$

代入(10.3)式并加以整理，則

$$M_x = -\frac{K}{6}\left(1 - \frac{\lambda^x + \lambda^{n-x}}{1+\lambda^n}\right); \qquad (10.4)$$

由于 $\lambda = -0.2679$，所以当跨数 n 增大时，对于 1 来說，分母的 λ^n 可以省略。也就是

$$M_x = -K(1 - \lambda^x - \lambda^{n-x})/6. \qquad (10.5)$$

又当 n 增大时，在中央支点上 λ^x 与 λ^{n-x} 都趋近于零，所以 M_x 可以近似地写作

$$M_x \approx -K/6.$$

例如均布荷載 p 作用于梁的全长时，由于 $K = pl^2/2$，所以一般

$$M_x = -\frac{pl^2}{12}\left(1 - \frac{\lambda^x + \lambda^{n-x}}{1+\lambda^n}\right), \qquad (10.6)$$

在多跨的連續梁的中央部分

$$M_x \approx -pl^2/12.$$

b) 当仅有一跨有荷載作用时 例如仅在支点 $i-1$ 与 i 之間有荷載时，K_x 除 K_{i-1} 与 K_i 之外全部为零。也就是

$$\left.\begin{array}{ll} 0<x<i-1: & M_{x-1} + 4M_x + M_{x+1} = 0, \\ x = i-1: & M_{i-2} + 4M_{i-1} + M_i = -K_{i-1}, \\ x = i: & M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = -K_i, \\ i<x<n: & M_{x-1} + 4M_x + M_{x+1} = 0. \end{array}\right\} \qquad (10.7)$$

若将第一式与第四式分别考虑作不同的齐次方程，则其一般解由(10.2)式可以写作：

$$\left.\begin{array}{ll}0\leqslant x\leqslant i-1: & M_x=A\lambda^x+B\lambda^{-x},\\ i\leqslant x\leqslant n: & M_x=C\lambda^x+D\lambda^{-x},\end{array}\right\}\tag{10.8}$$

其中的四个常数可确定如下，也就是由条件 $M_0=0$ 与 $M_n=0$，得到

$$A+B=0,\quad C\lambda^n+D\lambda^{-n}=0.$$

又由 $x=i-1$ 与 $x=i$ 的边界条件，也就是将(10.8)式代入(10.7)的第二与第三式，得到

$$A\lambda^{i-2}+B\lambda^{-(i-2)}+4(A\lambda^{i-1}+B\lambda^{-(i-1)})+C\lambda^i+D\lambda^{-i}=-K_{i-1},$$

$$A\lambda^{i-1}+B\lambda^{-(i-1)}+4(C\lambda^i+D\lambda^{-i})+C\lambda^{i+1}+D\lambda^{-(i+1)}=-K_i.$$

由这四个式子就可解出 A, B, C, D. 由 $A=-B$, $C=-\lambda^{-2n}D$，所以

$$\begin{array}{ll}0\leqslant x\leqslant i-1: & M_x=A(\lambda^x-\lambda^{-x}),\\ i\leqslant x\leqslant n: & M_x=C(\lambda^x-\lambda^{2n-x}).\end{array}$$

其中 A 与 C，当 K_x 給定后，可由后二式定出。

2. 中間点支承的直杆的稳定問題

如图 10.2 所示，在长为 nl，中間的支点为 1, 2, …, $n-1$ 的杆上有偶力 N 作用时，則使此杆发生撓曲时的 N 的值，也就是所求的撓曲荷載。

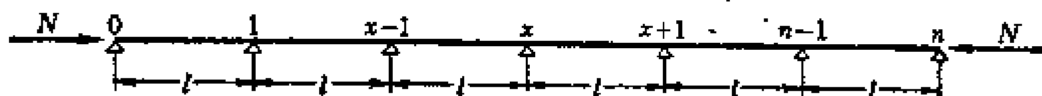


图 10.2

設杆的材料的 Young 模量为 E，断面慣矩为 I.

当杆发生了撓曲，則弯矩发生作用，若設在支点 x 的弯矩为 M_x，則从結构力学教科书中知道：关系式

$$M_{x-1}+2\mu M_x+M_{x+1}=0\tag{10.9}$$

成立，其中

$$\mu=\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha-\sin\alpha},\quad \alpha=l\sqrt{\frac{N}{EI}}. \qquad (10.10)$$

(10.9) 式是 2 阶对称形齐次方程，M_x 的一般解可以用三角函数表示。即

$$M_x=A\sin\varphi x+B\cos\varphi x,\quad \varphi=\cos^{-1}(-\mu). \qquad (10.11)$$

a) **两端可轉动的情形** 此时边界条件是 $M_0=0$, $M_n=0$, 因而

$$M_0=0:\quad A\times 0+B\times 1=0,$$

$$M_n=0:\quad A\sin n\varphi+B\cos n\varphi=0.$$

由第一式得 $B=0$，再由第二式得 $A\sin n\varphi=0$. 这一条件也为 $A=0$ 所満足，但此时 M_x 恒为零而与 N 无关。这与撓曲的条件不合。所以必須

$$\sin n\varphi=0. \qquad (10.12)$$

由是

$$\varphi=\frac{r\pi}{n}\quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

当 φ 取这些值时，由(10.11)式得到 μ，从而 α 的值可由

$$\mu=\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha-\sin\alpha}=-\cos\frac{r\pi}{n}=\cos\frac{n-r}{n}\pi \qquad (10.13)$$

确定，确定了 α 以后，則撓曲荷載为

$$N=\frac{\alpha^2EI}{l^2}. \qquad (10.14)$$

因为 r 可以是零或是任意的整数，而 φ 若取正值，則 $\cos\varphi$ 除

$$\cos\frac{r\pi}{n}\quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

等 $n+1$ 个值以外，沒有其他不同的值。因此若命 $n-r=i$，則 (10.13)化作

$$\mu=\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha-\sin\alpha}=\cos\frac{i\pi}{n}\quad(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ (10.13')$$

由此得到 $n+1$ 个不同的 μ 值。

为了由上式确定 α，繪出 α 与 μ 的关系如图10.3。由于 $-1\leqslant\cos\varphi\leqslant1$，由图可知，对于 $n+1$ 个不同的 $\cos\varphi$ 的每个值，满足(10.13′)的 α 有无数个。

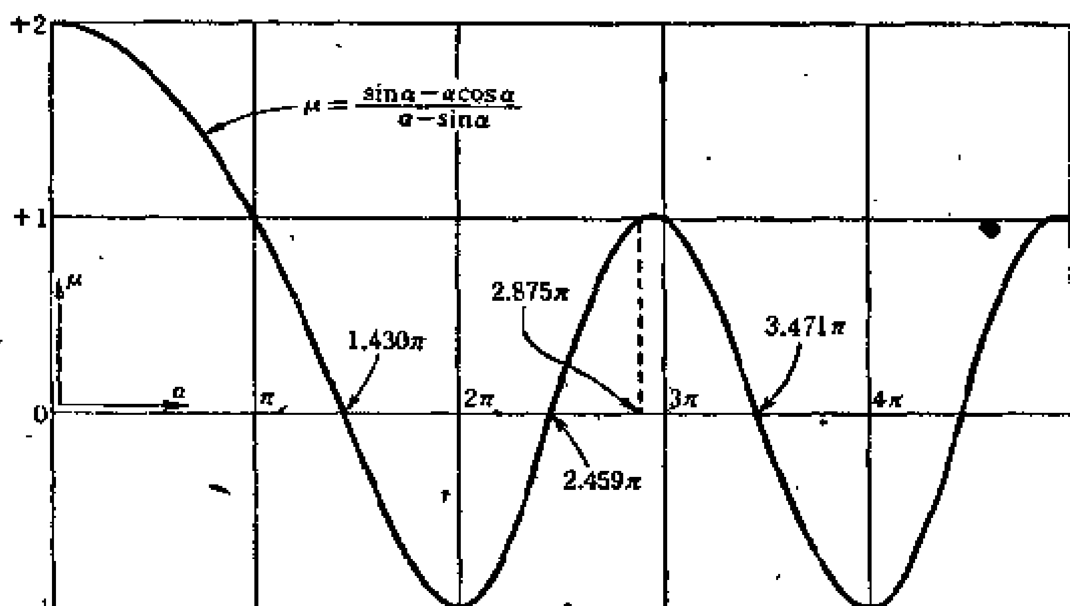


图 10.3

然而将荷载 N 自 0 逐渐增大时，由于 α 也从 0 逐渐增大，所以可以取满足(10.13′)式的 α 值中的最小者为撓曲开始产生的情形。也就是取对应于 $i=0(\varphi=\pi)$，或 $\mu=\cos 0=1$ 的 α 值，亦即 $\alpha=\pi$。故最小的撓曲荷載是

$$N=\frac{\pi^2EI}{l^2}.\qquad(10.15)$$

此式与跨数无关，它与从 Euler 公式所得出的两端可轉动、长为 l 的杆的撓曲是一致的。

在这种情形下，支点的彎矩是 $M_x=A\sin x\alpha$，它对所有的 x 为 0。故撓曲产生与否有必要仔細推究。为此，将撓曲的杆的变形由結构力学的定理求之，由图 10.4 得到



图 10.4

$$N\cdot y\sin\alpha=M_x(\sin\alpha\xi'-\xi'\sin\alpha)+M_{x+1}(\sin\alpha\xi-\xi\sin\alpha),\quad(10.16)$$

在支点 x 处 ($\xi=0$, $\xi'=1$), 求 $y'=dy/d\xi$ 则

$$N\cdot(y')_x\sin\alpha=(\alpha-\sin\alpha)(\mu M_x+M_{x+1}),\quad(10.17)$$

将 $M_x=A\sin\varphi x$ 代入,并考虑到 $\mu=-\cos\varphi$ 及 $\alpha=\varphi=\pi$, 进行整理后得到

$$N\cdot(y')_x=A\pi\cos\pi x.\quad(10.18)$$

由此, 既然 $A\neq0$, 因此, 即使当 $\varphi=\pi$ 也有 $M_x=0$, 但 $(y')_x$ 不等于零。从而可知会发生挠曲,这种情形的挠曲如图 10.5 所示。



图 10.5

其次、研究 $\alpha>\pi$ 时的挠曲形状, 以 $n=2$ 的情形为例。此时由(10.13′)式, 对 φ 的 3 个值: 0, $\pi/2$, π, 得到 $\mu=-1$, 0, 1, 而

当 $\mu=-1$ 时, $\alpha=2\pi$, 4π, 6π, …

当 $\mu=0$ 时, $\alpha=1.430\pi$, 2.459π, 3.471π, …

当 $\mu=1$ 时, $\alpha=\pi$, 2.875π, 3π, 4.920π, 5π, …,

其中 $\alpha=\pi$ 的情形是与前面一样的,对于其次的值 $\alpha=1.430\pi$,

$$N=2.046\frac{\pi^2EI}{l^2}.\quad(10.19)$$

此时 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, 弯矩

$$M_0=0,\ M_1=A\sin\frac{\pi}{2}=A,\ M_2=0,$$

从而由(10.16)式求从支点 0 到支点 1 之間的形变:

$$N\cdot y=-A\left(\frac{\sin1.430\pi\xi}{0.976}+\xi\right).$$

而挠曲的形状如图 10.6 所示。

又对于更大的 α 值,有

$$\alpha=2\pi\,(\varphi=0):\ N=4\,\frac{\pi^2EI}{l^2},\ M_1=0,$$

$$\alpha=2.459\pi\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right):\ N=6.047\,\frac{\pi^2EI}{l^2},\ M_1=A,$$

这些撓曲的形狀如图 10.6 所示。

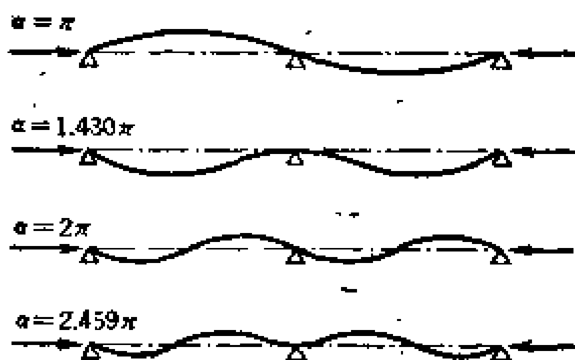


图 10.6

b) 两端固定的情形 此时边界条件是

$$\mu M_0+M_1=0\ 及\ M_{n-1}+\mu M_n=0.$$

将其代入 M_x 的一般解 (10.11)，考虑到 $\mu=-\cos\varphi$，进行整理，則得下列两式

$$A\sin\varphi+B\times0=0,$$

$$A[\sin(n-1)\varphi-\cos\varphi\sin n\varphi]$$
$$+B[\cos(n-1)\varphi-\cos\varphi\cos n\varphi]=0.$$

为了不使 A, B 同时为零，必須

$$\begin{vmatrix}\sin\varphi & 0\\ \sin(n-1)\varphi-\cos\varphi\sin n\varphi & \cos(n-1)\varphi-\cos\varphi\cos n\varphi\end{vmatrix}=0.$$

加以整理后，得出

$$\sin^2\varphi\sin n\varphi=0, \tag{10.20}$$

从而

$$\varphi=\frac{r\pi}{n}\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

其結果与两端为可轉动时完全相同，因而最小撓曲荷載是

$\varphi=\pi$，亦即 $\mu=-\cos\varphi=1$，$\alpha=\pi$ 的情形。但此时

$$M_x=B\cos\pi x=(-1)^x B,$$

代入(10.17)式，得到

$$N\cdot(y')_x=(-1)^x B\left(2-\alpha\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right),$$

取 $\alpha=\pi$，则由

$$\lim_{\alpha=\pi}\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=0$$

得 $N\cdot(y')_x=(-1)^x 2B$，因之只要 $B\neq 0$，则 $(y')_x$ 不为零。然而在两端固定的情形下，必须有 $(y')_0=0$，$(y')_n=0$，所以 B 一定为零。故 M_x 恒为零，从而不能产生撓曲。

在这种情形下求撓曲最小荷载时，可以从满足(10.13′)的 α 中取 $\alpha=\pi$ 以后的值。也就是使

$$\mu=-\cos\frac{n-1}{n}\pi=\cos\frac{\pi}{n}$$

的 α 値中的最小値，亦即

当 $n=1$ 时，$\alpha=2\pi$；　　当 $n=2$ 时，$\alpha=1.430\pi$；

当 $n=3$ 时，$\alpha=1.228\pi$；当 $n=4$ 时，$\alpha=1.138\pi$；…。

这样在 n 跨情形的撓曲荷载是

$$N_n=k_n\frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

此处

$$k_1=4.0,\quad k_2=2.046,\quad k_3=1.507,\quad k_4=1.295,\ \cdots,$$

当跨数增多时，α 和 π 逐漸地趋于 $\alpha=\pi$，$k=1$，也就是逐漸趋向于两端为可轉动时的情形。

对于这些 N 値，撓曲的形状如图 10.7。特别对 $n=2$ 的情形，由上列各个 α 的値，得到撓曲荷载与撓曲的形状如图 10.8。

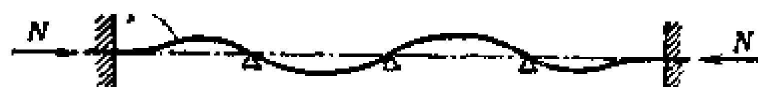


图　10.7

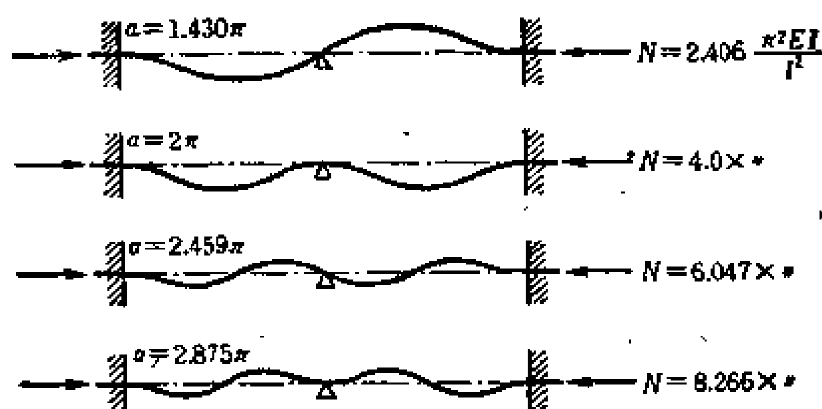


图　10.8

3. 以彈性支承鉸接連結的杆的稳定問題

如图10.9所示，設有n条直杆为鉸接連結，鉸点在横向被彈性支承。即某鉸点x在横的方向位移了y_x时，与該点的反作用力R_x之間有关系

$$R_x = k y_x . \qquad (10.21)$$



图　10.9

今在这样連結的杆的两端加偶力N，并使N逐漸增大而达到某値时，杆所連結成的直綫形的平衡被破坏，各个支点作横向位移而不稳定。但由于杆本身很坚实，所以在上述不稳定状态中杆本身不发生撓曲。

在这种情况下，支点作横向位移，由結构力学上的定理，有

$$y_{x-1} - \left(2 - \frac{kl}{N}\right) y_x + y_{x+1} = 0, \qquad (10.22)$$

这是2阶齐次差分方程。其一般解为

$$y_x = A\sin\varphi x + B\cos\varphi x,\quad \cos\varphi = 1 - \frac{kl}{2N}.$$

若将边界条件 $y_0=0$, $y_n=0$ 代入，则与前例一样得到

$$B=0,\quad A\sin n\varphi = 0.$$

若 A 与 B 同时为零，则 y_x 恒为零而与 φ（亦即与 N）无关，这是平衡状态。因而不稳定情形就不能不是

$$\sin n\varphi = 0. \tag{10.23}$$

由此，与上面一样得到

$$\varphi = \frac{r\pi}{n}\quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

对于各个 φ 的值，可以由

$$N = \frac{kl}{2(1-\cos\varphi)} \tag{10.24}$$

求 N，这些 N 的最小值就是临界荷载。

然而在此 $n+1$ 个 φ 值中，当 $r=0$, $r=n$ 时，

$$y_x = A\sin 0\times x\ \ 或\ \ y_x = A\sin\pi x,$$

因此 y_x 恒为零，从而这两个值必須除外。于是当 $\cos\varphi$ 取最小值时，亦即 $\varphi=\dfrac{(n-1)\pi}{n}$ 时，N 为最小，因而临界荷載

$$N = \frac{kl}{2\left(1-\cos\dfrac{n-1}{n}\pi\right)} = \frac{kl}{2\left(1+\cos\dfrac{\pi}{n}\right)}. \tag{10.25}$$

当 $n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ 时，上式分母为 2.0, 3.0, 3.414, 3.618, …，当 $n\to\infty$ 时，它趋于 4.

又各个支点的位移是

$$y_x = A\sin\frac{n-1}{n}\pi x = (-1)^x A\sin\frac{\pi}{n}x, \tag{10.26}$$

其图形如图 10.10 所示。



图 10.10

注意 在 Bleich-Melan 一书中(参閱本书最后一頁),将(10.25)式取作 $N=\frac{2k}{l}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)$,并提到"$n=\infty$ 时 $N=\frac{4k}{l}$",这是錯誤的。由 k 的因次来看,也很明显。即由(10.21)式,k 是[力]/[长],而 N 是[力],所以必須是 $N\propto kl$。

§11 联立方程

設 y_x, z_x, w_x, …为自变数 x 的函数,则差分方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k} a_i y_{x+i}+\sum_{i=0}^{m} b_i z_{x+i}+\sum_{i=0}^{n} c_i w_{x+i}+\cdots=K_x,\\
&\sum_{i=0}^{k'} a'_i y_{x+i}+\sum_{i=0}^{m'} b'_i z_{x+i}+\sum_{i=0}^{n'} c'_i w_{x+i}+\cdots=K'_x,\\
&\sum_{i=0}^{k''} a''_i y_{x+i}+\sum_{i=0}^{m''} b''_i z_{x+i}+\sum_{i=0}^{n''} c''_i w_{x+i}+\cdots=K''_x,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{11.1}$$

叫做**联立差分方程**。式中的 a, b, c, …是与 x 无关的常数。一般,构成联立方程的差分方程的个数必須与未知函数的个数相一致。k, m, n, …; k', m', n', …; k'', m'', n'', …分别是各个差分方程关于 y_x, z_x, w_x, …的阶数。

1. 消去法 从(11.1)式的第二式,第三式,…解出 z_x, w_x, …亦即将它們表为 y_x 的函数,然后代入第一式,得到仅含有 y_x 的差分方程。記 k, k', …; m, m', …; n, n', …;…中的最大者分别为 $\bar{k}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$,则消去 z_x, w_x, …后所得 y_x 的差分方程的阶数

$$s\leqslant\bar{k}+\bar{m}+\bar{n}+\cdots,$$

因之它的一般解含有 s 个任意常数。而且由于 z_x, w_x, …的一般解是由 y_x 的一般解来决定的,所以 z_x, w_x, …的一般解也含有同

样的 s 个任意常数。

簡例:

$$\left.\begin{aligned} y_{x+1}+4y_x+y_{x-1}+z_{x+1}-z_x&=K_x,\\ y_{x+1}-2y_x\qquad\quad -z_{x+1}-z_x&=0,\end{aligned}\right\}$$

其中 $k=2$, $m=1$ 故 $s\leqslant 3$. 事实上我們若将二式相加,消去 z_{x+1}, 就得到

$$z_x=y_{x+1}+y_x+0.5y_{x-1}-0.5K_x.$$

由此作出 z_{x+1}, 再代入联立方程中任一式,即得下列3阶差分方程:

$$2y_{x+2}+2y_{x+1}+7y_x+y_{x-1}=K_{x+1}+K_x.$$

一般也可以按下列順序进行。設对于 y_x, z_x, …的差分运算符号为 $D_1(y)$, $D_2(z)$, …, 則对于 y_x 与 z_x 的联立差分方程:

$$D_1(y)+D_2(z)=K_x,\quad D_1'(y)+D_2'(z)=K_x' \tag{11.2}$$

可以如下地来进行。将(11.2)式中的第一式作关于 D_2' 的运算,将第二式作关于 D_2 的运算,則得

$$D_2'[D_1(y)]+D_2'[D_2(z)]=D_2'(K_x),$$
$$D_2[D_1'(y)]+D_2[D_2'(z)]=D_2(K_x').$$

由于 $D_2'[D_2(z)]=D_2[D_2'(z)]$, 所以将上述两式相减,即得仅含有 y 的差分方程:

$$D_2'[D_1(y)]-D_2[D_1'(y)]=D_2'(K_x)-D_2(K_x'). \tag{11.3}$$

2. 直接解法 联立差分方程(11.1)的一般解,也可以直接寻求。但是各差分方程必須是齐次方程,或是特解容易求得的非齐次方程。

现在我們考虑(11.1)式的左边的非齐次項全部等于零的联立齐次差分方程。在这种情形下,我們直接取

$$y_x=A\lambda^x,\quad z_x=B\lambda^x,\quad w_x=C\lambda^x,\ \cdots. \tag{11.4}$$

其中 A, B, C, …与 x 无关。将(11.4)式代入給定的联立方程,并消去公共因子 λ^x, 即得

$$\left.\begin{aligned} A\sum_{i=0}^{k}a_i\lambda^i+B\sum_{i=0}^{m}b_i\lambda^i+C\sum_{i=0}^{n}c_i\lambda^i+\cdots&=0,\\ A\sum_{i=0}^{k'}a_i'\lambda^i+B\sum_{i=0}^{m'}b_i'\lambda^i+C\sum_{i=0}^{n'}c_i'\lambda^i+\cdots&=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\end{aligned}\right\} \tag{11.5}$$

将此式看成关于A, B, C, …的联立方程，那么为了求得不同时为零的A, B, C, …, 必須

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix}\sum a_i\lambda^i & \sum b_i\lambda^i & \sum c_i\lambda^i & \cdots \\ \sum a_i'\lambda^i & \sum b_i'\lambda^i & \sum c_i'\lambda^i & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}=0. \tag{11.6}$$

而这也就是关于(11.1)式的特征方程，由于此式的λ是s次，所以一般得到s个根。

由于$\varphi(\lambda)=0$意味着A, B, C, …不是綫性独立的。也就是若任意指定A, B, C, …中的某一个，则其他的每一个都可以由此而表示出来。例如若指定$A=1$，则

$$A=1,\quad B=\alpha'\cdot 1,\quad C=\alpha''\cdot 1,\ \cdots$$

其中α', α'', …由(11.5)式决定。也就是若将上式的A, B, C, …代入(11.5)式，卽得

$$\left.\begin{array}{l}\alpha'\sum b_i\lambda^i+\alpha''\sum c_i\lambda^i+\cdots=-\sum a_i\lambda^i, \\ \alpha'\sum b_i'\lambda^i+\alpha''\sum c_i'\lambda^i+\cdots=-\sum a_i'\lambda^i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{array}\right\} \tag{11.7}$$

从而可以确定出α', α'', …. 但是，若設y_x, z_x, w_x, …的个数为n，则由(11.7)式得到n个式子，而决定α', α'', …所必須的只是其中$n-1$个，剩余的1个与此$n-1$个不是綫性独立的，可以用它来驗算我們算出的結果。

确定了λ, α', α'', …以后，

$$y_x=\lambda^x,\quad z_x=\alpha'\lambda^x,\quad w_x=\alpha''\lambda^x,\ \cdots$$

卽为联立齐次方程的一个特解。然而λ一般有s个不同的根λ_1, λ_2, λ_3, …, 而对于其中每一个都可决定出一組α', α'', …, 因此得到α_1', α_2', …; α_1'', α_2'', …; …; …于是联立齐次方程的一般解可以表示成下列形式：

$$\left.\begin{aligned} y_x&=C_1\lambda_1^x+C_2\lambda_2^x+\cdots+C_s\lambda_s^x,\\ z_x&=C_1\alpha_1'\lambda_1^x+C_2\alpha_2'\lambda_2^x+\cdots+C_s\alpha_s'\lambda_s^x,\\ w_x&=C_1\alpha_1''\lambda_1^x+C_2\alpha_2''\lambda_2^x+\cdots+C_s\alpha_s''\lambda_s^x,\end{aligned}\right\} \tag{11.8}$$

当特征方程 (11.6) 的根中有重根时，(11.8) 式不成立。例如 λ 有 r 重根，则除 λ^x 以外；$x\lambda^x$，$x^2\lambda^x$，$\cdots$，$x^{r-1}\lambda^x$ 都是 y_x 的独立的特解。这是联立差分方程由消去法可以导出仅仅关于 y_x 的唯一的方程，如在 §6 所述这是很明显的。而且对应上述 y_x 的特解，z_x，w_x，$\cdots$的特解是 y_x 的特解的綫性函数。

例如 λ 是(11.6)的二重根时，除了

$$y_x=\lambda^x,\quad z_x=\alpha'\lambda^x,\quad w_x=\alpha''\lambda^x,\ \cdots$$

以外

$$y_x=x\lambda^x,\ z_x=\alpha'(x+\beta')\lambda^x,\ w_x=\alpha''(x+\beta'')\lambda^x,\ \cdots \tag{11.9}$$

也是特解。此处 β'，β''，$\cdots$必須选擇如下。也就是将(11.9)式代入所給定的联立差分方程，则得

$$\sum a_i(x+i)\lambda^{x+i}+\alpha'\sum b_i(x+\beta'+i)\lambda^{x+i}+\alpha''\sum c_i(x+\beta''+i)\lambda^{x+i}+\cdots=0,$$
$$\sum a_i'(x+i)\lambda^{x+i}+\alpha'\sum b_i'(x+\beta'+i)\lambda^{x+i}+\alpha''\sum c_i'(x+\beta''+i)\lambda^{x+i}+\cdots=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

消去 λ^x 后，上式可改写为

$$x(\sum a_i\lambda^i+\alpha'\sum b_i\lambda^i+\alpha''\sum c_i\lambda^i+\cdots)$$
$$+(\sum a_i i\lambda^i+\alpha'\sum b_i(\beta'+i)\lambda^i+\alpha''\sum c_i(\beta''+i)\lambda^i+\cdots)=0,$$
$$x(\sum a_i'\lambda^i+\alpha'\sum b_i'\lambda^i+\alpha''\sum c_i'\lambda^i+\cdots)$$
$$+(\sum a_i' i\lambda^i+\alpha'\sum b_i'(\beta'+i)\lambda^i+\alpha''\sum c_i'(\beta''+i)\lambda^i+\cdots)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

要这个式子对于任意的 x 都成立，也就是要这个式子与 x 没有关系。那么 x 的系数必須全部为零。然而这样得出的方程与 (11.7) 式完全相同，故若 α'，α''，$\cdots$是由(11.7)式所确定的，则上式中与 x 无关的项必然是零，从而可以决定 β'，β''，$\cdots$。若設 y_x，z_x，w_x，$\cdots$ 的个数为 n，則由上述的条件所得的式子的个数显然也是 n，但其中有一个与其余的 $n-1$ 个又是綫性独立的，所以由此 $n-1$ 个式子只能确定 $n-1$ 个 $\beta'\beta''\cdots$。

以上的方法可以推广到特征方程(11.6)有 3 重以上的多重根时的情形。

3. 联立非齐次方程的特解 联立非齐次方程的特解❶，可由迭加原理

❶ 原书誤为特征。——譯者注

得出。亦即将只有第一式是非齐次方程时的特解，只有第二式是非齐次方程时的特解，…相加而得出。因此在这里我們只考慮例如 K_x 不为零的情形就够了。此时将 K_x 表示成 $K_x=b^x f(x)$ 的形式(参閱§9)，則

$$y_x=b^x u_1(x),\quad z_x=b^x u_2(x),\quad w_x=b^x u_3(x),\ \cdots$$

即为所求的特解。其中 $u_1(x)$，$u_2(x)$，…，当 b 不为特征方程(11.6)的根时，是与 $f(x)$ 同次的有理整函数，当 b 是(11.6)的 r 重根时，是比 $f(x)$ 高 r 次的有理整函数。

第4章　变系数綫性差分方程

§12　能化成常系数方程的情形

系数为 x 的函数的綫性差分方程的一般解的性质，已經在第2章中加以說明了，可是一般能将此解求出的情形不多。但如果我們能将它化为常系数方程，則能求得一般解。

1．
$$y_{x+n}+a_1p(x)y_{x+n-1}+a_2p(x)p(x-1)y_{x+n-2}+\cdots+a_np(x)p(x-1)\cdots p(x-n-1)y_x=K_x. \tag{12.1}$$

对于这一方程，我們取新函数 z_x，并令
$$y_x=p(x-n)p(x-n-1)\cdots p(2)p(1)z_x, \tag{12.2}$$
由此算出 y_{x+n}，y_{x+n-1}，…，并代入所給的 (12.1) 式中，則得 n 阶常系数綫性差分方程：
$$z_{x+n}+a_1z_{x+n-1}+a_2z_{x+n-2}+\cdots+a_nz_x=\frac{K_x}{p(x)p(x-1)\cdots p(1)}. \tag{12.3}$$

2．在結构力学的三連矩定理及其他問題中常出現
$$p(x)y_{x-1}+2[p(x)+p(x+1)]y_x+p(x+1)y_{x+1}=K_x. \tag{12.4}$$
对于这一方程，我們取 z_x 与 w_x 为 x 的函数，并令
$$y_x=z_x/w_x, \tag{12.5}$$
代入上式两边，以 w_x 除之，則得
$$\frac{p(x)}{w_{x-1}w_x}z_{x-1}+2\frac{p(x)+p(x+1)}{w_x^2}z_x+\frac{p(x+1)}{w_xw_{x+1}}z_{x+1}=\frac{K_x}{w_x}. \tag{12.6}$$
若取 b 为常数，并且适当选擇 w_x 使
$$\frac{p(x)}{w_{x-1}w_x}=\frac{p(x+1)}{w_xw_{x+1}}=1,\quad \frac{p(x)+p(x+1)}{w_x^2}=b, \tag{12.7}$$

则(12.6)式化作关于 z_x 的常系数差分方程:

$$z_{x-1}+2b\,z_x+z_{x+1}=K_x/w_x. \tag{12.8}$$

要确定 w_x, 由(12.7)的第一式得到

$$p(x)=w_{x-1}w_x,\ p(x+1)=w_x w_{x+1}.$$

代入第二式并进行整理,则得关于 w_x 的差分方程:

$$w_{x-1}-b\,w_x+w_{x+1}=0. \tag{12.9}$$

設其特征方程

$$\alpha^2-b\alpha+1=0 \tag{12.10}$$

的两个根为 α 与 α^{-1}, 则 w_x 的一般解为

$$w_x=A\alpha^x+B\alpha^{-x}. \tag{12.11}$$

其中由于 b 是任意的, 所以 α 也是任意的。若取 $b=\pm2$, 则 α 是 $+1$ 或 -1 的 2 重根,此时

$$w_x=(\pm1)^x(A+Bx). \tag{12.11'}$$

这是由(12.7)式的第二式得到的 w_x 的解,它也一定满足第一式,即满足 $w_{x-1}w_x=p(x)$。我們若将(12.11)代入 $w_{x-1}w_x=p(x)$, 则得

$$(A\alpha^{x-1}+B\alpha^{-x+1})(A\alpha^x+B\alpha^{-x})=p(x), \tag{12.12}$$

特别当 $b=\pm2$ 时,得到

$$\pm[A+B(x-1)](A+Bx)=p(x). \tag{12.12'}$$

所以, 在将差分方程(12.4)化为常系数差分方程(12.8)的过程中, 必須选擇 w_x 的一般解中的常数 A, B, α 使它满足(12.12)或(12.12')。反之,若 $p(x)$ 是等于(12.12)或(12.12')的左边的函数时,则上述的变换也是可能的。

由于 z_x 是由(12.8)式求出的。而 $b=\alpha+\alpha^{-1}$,故

$$z_{x-1}+2(\alpha+\alpha^{-1})z_x+z_{x+1}=K_x/w_x, \tag{12.13}$$

設其特解为 $z_0(x)$, 特征方程

$$\beta^2+2(\alpha+\alpha^{-1})\beta+1=0$$

的两个根为 β 与 β^{-1}，则 z_x 的一般解是

$$z_x=z_0(x)+C_1\beta^x+C_2\beta^{-x}. \tag{12.14}$$

这样，若 w_x 与 z_x 已知，则由(12.5)式可以求得 y_x 的一般解。

§13 1阶齐次綫性差分方程

下面介紹齐次綫性差分方程

$$y_{x+1}-p(x)y_x=0 \tag{13.1}$$

的一般解的求法。

我們将此式改写为 $y_{x+1}=p(x)y_x$，两边取对数，则

$$\log y_{x+1}=\log p(x)+\log y_x,$$

$$\log y_{x+1}-\log y_x=\log p(x),\quad \Delta\log y_x=\log p(x).$$

将其取和分，則得

$$\log y_x=\mathfrak{S}\log p(x)\,\Delta x+C. \tag{13.2}$$

其中 C 为任意常数。也可以将 C 换成周期为 $\Delta x=1$ 的任意的周期函数。

由(13.2)式求得 y_x 的一般解：

$$y_x=Ce^{S(x)},\ 其中\ S(x)=\mathfrak{S}\log p(x)\,\Delta x. \tag{13.3}$$

此解的另一表达形式是

$$y_x=C\prod_{x=a}^{x-1}p(x). \tag{13.4}$$

因为当 a 为任意一数时，都有

$$S(x)=\mathfrak{S}_a^x\log p(x)\,\Delta x=\sum_{x=a}^{x-1}\log p(x)=\log\prod_{x=a}^{x-1}p(x),$$

故
$$y_x=C\prod_{x=a}^{x-1}p(x).$$

例 1. 求

$$y_{x+1}-e^{ax}y_x=0 \tag{13.5}$$

的一般解。

由(13.3)式，

$$S(x)=\S\log e^{ax}\Delta x=\S\ ax\Delta x=a\S\ x\Delta x=\frac{a}{2}x(x-1),$$

故

$$y_x=Ce^{S(x)}=Ce^{\frac{ax(x-1)}{2}}.\tag{13.6}$$

例 2. 設 $p(x)=a$(常数)，解

$$y_{x+1}-ay_x=0.\tag{13.7}$$

由

$$S(x)=\S\ \log a\ \Delta x=\log a\S\ \Delta x=\log a\cdot x,$$

故

$$y_x=C\cdot a^x.\tag{13.8}$$

例 3. 求

$$y_{x+1}-\frac{x+r}{x+r+1}y_x=0\tag{13.9}$$

的一般解，其中 r 为常数。

由(13.4)式，

$$\prod_{x=a}^{x-1}\frac{x+r}{x+r+1}=\frac{a+r}{a+r+1}\cdot\frac{a+r+1}{a+r+2}\cdots\frac{x+r-2}{x+r-1}\cdot\frac{x+r-1}{x+r}=\frac{a+r}{x+r},$$

同时由于 a 是任意常数，所以可将 $a+r$ 取作 C，則

$$y_x=\frac{C}{x+r}.\tag{13.10}$$

例 4. 設 $p_1(x)$，$p_2(x)$，…，$p_n(x)$ 是 x 的函数，求

$$y_{x+1}-p_1(x)p_2(x)\cdots p_n(x)y_x=0\tag{13.11}$$

的一般解。

設

$$y_{x+1}-p_i(x)y_x=0\quad(i=1,2,3,\cdots,n)$$

的解为

$$\eta_i(x)=e^{S_i(x)},\text{ 此处 }S_i(x)=\S\ \log p_i(x)\Delta x.$$

則

$$\S\ \log\prod_{i=1}^{n}p_i(x)\Delta x=\S\left\{\sum_{i=1}^{n}\log p_i(x)\right\}\Delta x$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\S\ \log p_i(x)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}S_i(x),$$

从而(13.11)的一般解是

$$y_x=C\prod_{i=1}^{n}\eta_i(x).\tag{13.12}$$

§14 Gamma-函数

在求

$$y_{x+1}-xy_x=0 \tag{14.1}$$

的一般解中，若限制 x 为正整数，则由 (13.4) 式，取 $a=1$，由于

$$\prod_{x=1}^{x-1} x=1\cdot 2\cdot 3\cdots(x-1)=(x-1)!,$$

所以

$$y_x=C(x-1)!, \tag{14.2}$$

此处 C 为任意常数。但是当 x 不为正整数时，此式不成立。为了对任意的 x 求方程的一般解，我們設 n 为正整数，x 为任意实数，来考虑方程

$$y_{x+1}-\frac{nx}{x+n}y_x=0. \tag{14.3}$$

此式当 $n\to\infty$ 时，与 (14.1) 相一致。

但由于

$$\frac{nx}{x+n}=n\frac{x+0}{x+1}\frac{x+1}{x+2}\frac{x+2}{x+3}\cdots\frac{x+n-1}{x+n}=n\prod_{r=0}^{n-1}\frac{x+r}{x+r+1},$$

所以 (14.3) 式化为

$$y_{x+1}-n\prod_{r=0}^{n-1}\frac{x+r}{x+r+1}y_x=0.$$

根据 (13.8)，(13.10)，(13.12)，这个方程的解是

$$y_x=Cn^x\prod_{r=0}^{n-1}\frac{1}{x+r}=C\frac{n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}. \tag{14.4}$$

再以与 x 无关的常数 $(n-1)!$ 乘之，则得

$$y_x=C\frac{(n-1)!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}, \tag{14.5}$$

令 $n\to\infty$，因为 (14.3) 化为 (14.1)，所以 (14.5) 化为

$$y_x=C\Gamma(x), \tag{14.6}$$

其中

$$\Gamma(x)=\lim_{n=\infty}\frac{(n-1)!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \tag{14.7}$$

是 Gamma-函数。它除 $x=0,\ -1,\ -2,\cdots$ 时为无限大以外，对于任意的 x 都具有有限值，由此即得(14.1) 的一般解。

Gamma-函数的特征之一：

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x), \tag{14.8}$$

由(14.7) ❶式可以直接得出。

多重 Gamma-函数 求1阶非齐次方程：

$$y_{x+1}-y_x=\frac{1}{x} \tag{14.9}$$

的解。这是求

$$\Delta y_x=\frac{1}{x},\quad y_x=\mathop{S}\frac{1}{x}\,\Delta x \tag{14.10}$$

的和分問題。

今設

$$\Psi(x)=\lim_{n=\infty}\left(\log n-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\cdots\frac{1}{x+n-1}{}^{❷}\right) \tag{14.11}$$

则由于 $\Delta\Psi(x)=1/x$，所以 $1/x$ 的和分是 $\Psi(x)$，因此(14.9)的一般解是

$$y_x=\mathop{S}\frac{1}{x}\,\Delta x=\Psi(x)+C. \tag{14.12}$$

$\Psi(x)$叫做 **Psi-Gamma-函数**或叫做**二重 Gamma-函数**。它除 x 为零及負整数时为无限大以外，对于任意的 x，都具有有限值。至于如何从(14.10)式导出(14.11)可参閱福田：差分法。

(14.12) 式也可以从 Gamma-函数求得。为此我們将(14.8)的两边取对数，并对 x 微分，然后移項，则得

$$\frac{d}{dx}\log\Gamma(x+1)-\frac{d}{dx}\log\Gamma(x)=\frac{1}{x},$$

---

❶ 原书誤为(14.1)。——校者注

❷ 原书誤为 $\frac{1}{n}$。——校者注

故

$$y_x=\frac{d}{dx}\log\Gamma(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}. \qquad (14.13)$$

由于

$$\frac{d}{dx}\log\Gamma(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

$$=\lim_{n=\infty}\left(\log n-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\cdots\frac{1}{x+n-1}❶\right)=\Psi(x),$$

所以(14.13)式等于(14.12)式。

又若将(14.11)式的 $\Psi(x)$ 对 x 进行微分，则

$$\Psi'(x)=1\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(x+r)^2},$$

$$\Psi''_{(x)}=(-1)\cdot1\cdot2\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(x+r)^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Psi^{(k-1)}(x)=(-1)^k(k-1)!\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(x+r)^k},$$

从而得下列关系

$$\left.\begin{aligned}&\mathop{S}\frac{\Delta x}{x^2}=\frac{1}{1!}\Psi'(x)+C,\ \mathop{S}\frac{\Delta x}{x^3}=-\frac{1}{2!}\Psi''(x)+C,\ \cdots,\\&\mathop{S}\frac{\Delta x}{x^k}=\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\Psi^{(k-1)}(x)+C.\end{aligned}\right\}\qquad(14.14)$$

$\Psi'_{(x)}$, $\Psi''_{(x)}$, $\Psi'''_{(x)}$, … 分别叫做三重、四重、五重、……Gamma-函数，它們总称为**多重 Gamma-函数**。

§15 系数为綫性函数的差分方程的定积分解法

設給定 n 阶齐次綫性差分方程：

$$\sum_{i=0}^{n}(a_ix+b_i)y_{x+i}=0, \qquad (15.1)$$

求这个方程形如

❶ 原书誤为 $\frac{1}{n}$。——校者注

$$y_x = \eta(x) = \int_C z^{x-1}\varphi(z)dz \tag{15.2}$$

的解，其中 z 是复数，$\varphi(z)$ 是 z 的适当的函数，C 是积分路徑。

将(15.2)式代入(15.1)式，则得

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i x + b_i)\int_C z^{x+i-1}\varphi(z)dz = 0,$$

将左边含有 x 的项与不含 x 的项分开，则

$$\int_C xz^{x-1}a(z)\varphi(z)dz + \int_C z^{x-1}b(z)\varphi(z)dz = 0,$$

其中

$$a(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i, \quad b(z) = \sum_{i=0}^{n} b_i z^i.$$

上两式中的第一式由分部积分法可以写为

$$[z^x a(z)\varphi(z)]_C - \int_C z^x d[a(z)\varphi(z)].$$

所以前一式可以化成

$$\int_C z^{x-1}\left\{b(z)\varphi(z) - z\frac{d}{dz}[a(z)\varphi(z)]\right\}dz + [z^x a(z)\varphi(z)]_C = 0.$$

为了使此式成立，只要下列二式成立就行了。也就是

$$b(z)\varphi(z) - z\frac{d}{dz}[a(z)\varphi(z)] = 0, \tag{15.3}$$

$$[z^x a(z)\varphi(z)]_C = 0. \tag{15.4}$$

于是由第一式(15.3)求出未知函数 $\varphi(z)$，由第二式(15.4)确定出积分路徑 C. 也就是在 C 的两端使括号内的值相等（例如都等于零），或者，当 C 是閉曲綫时，则沿 C 积分一周即可。这样求 y_x 的解的方法，与微分方程的解法一样，称为 Laplace 变换。

为了确定 $\varphi(z)$，我們将(15.3)式改写为

$$b(z)\varphi(z) - z[\varphi'(z)a(z) + \varphi(z)a'(z)] = 0,$$

亦即

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{b(z) - za'(z)}{za(z)},$$

从而得到

$$\left.\begin{aligned}\log\varphi(z)&=\int\frac{b(z)-za'(z)}{za(z)}dz=\int\frac{b(z)}{za(z)}dz-\log a(z),\\ \text{或}\quad \varphi(z)&=\frac{1}{a(z)}\exp\left(\int\frac{b(z)}{za(z)}dz\right).\end{aligned}\right\}\tag{15.5}$$

要确定 $\varphi(z)$，我們将(15.5)式的被积函数用部分分式写开是有其方便之处的。这是由于 $a(z)$ 一般是 n 次有理整函数，若設方程 $a(z)=0$ 的 n 个根为 α_1, α_2, $\cdots$, α_n，則一般可将 $\frac{b(z)}{za(z)}$ 写为

$$\frac{b(z)}{za(z)}=\frac{b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n}{z(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}$$

$$=\frac{\beta_0}{z}+\frac{\beta_1}{z-\alpha_1}+\frac{\beta_2}{z-\alpha_2}+\cdots+\frac{\beta_n}{z-\alpha_n},\tag{15.6}$$

从而

$$\exp\left(\int\frac{b(z)}{za(z)}dz\right)=\exp[\beta_0\log z+\beta_1\log(z-\alpha_1)+\cdots]$$

$$=z^{\beta_0}(z-\alpha_1)^{\beta_1}(z-\alpha_2)^{\beta_2}\cdots(z-\alpha_n)^{\beta_n}.$$

因此我們得到

$$\varphi(z)=z^{\beta_0}(z-\alpha_1)^{\beta_1-1}(z-\alpha_2)^{\beta_2-1}\cdots(z-\alpha_n)^{\beta_n-1}.\tag{15.7}$$

若 $a(z)=0$ 有重根时，例如 α_k 是其 r 重根，則 (15.6) 式的右边含有以下各項，亦即

$$\frac{\beta_k}{z-\alpha_k}+\frac{\beta_k'}{(z-\alpha_k)^2}+\frac{\beta_k''}{(z-\alpha_k)^3}+\cdots+\frac{\beta_k^{(r-1)}}{(z-\alpha_k)^r}.$$

从而在(15.7)式的 $\varphi(z)$ 中出現因数

$$(z-\alpha_k)^{\beta_k-r}\exp\left(-\frac{\beta_k'}{z-\alpha_k}-\frac{\beta_k''}{2(z-\alpha_k)^2}-\cdots-\frac{\beta_k^{(r-1)}}{(r-1)(z-\alpha_k)^{r-1}}\right).$$

又若 $b(z)$ 的次数不低于 $za(z)$ 的次数，則将其展成部分分式时，除眞分式以外，还产生一整函数 $g(z)$，故 $\varphi(z)$ 中还应加上一項

$$\frac{1}{a(z)}\exp\left(\int g(z)dz\right).$$

当由(15.4)式确定积分路徑 C 时，由于 $\varphi(z)$ 的形状而会产生种种情形。今就下列情形加以說明。設 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是互不相同的值，則 $\varphi(z)$ 是(15.7)的形狀。我們将(15.7)式代入(15.4)式，卽得

$$[z^{x+\beta_0}(z-\alpha_1)^{\beta_1}(z-\alpha_2)^{\beta_2}\cdots(z-\alpha_n)^{\beta_n}]_C=0. \tag{15.8}$$

为了簡单起見，以下将方括号中的函数以 $K(z)$ 表示之；則上式可写为

$$[K(z)]_C=0. \tag{15.8'}$$

現在又根据 α, β 的值，区别成下列两种情形。

(i) $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的实部全部为正的情形。

此时 $K(z)$ 除含有 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 等 n 个零点以外，还含有一个零点 α_0，而且 α_0

当 $\Re(x+\beta_0)>0$ 时，　　$\alpha_0=0$;

当 $\Re(x+\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_n)<0$ 时，　　$\alpha_0=\infty$.

所以积分路徑 C 的下限取 α_0，而其上限取 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ 或 α_n，由于在这种点处 $K(z)=0$，所以满足条件(15.8')。在这种情况下，积分路徑 C 是任意的。于是将积分路徑上限依次取为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，由此得到(15.1)式的 n 个特解：

$$\eta_i(x)=\int_{\alpha_0}^{\alpha_i} z^{x+\beta_0-1}(z-\alpha_1)^{\beta_1-1}(z-\alpha_2)^{\beta_2-1}\cdots(z-\alpha_n)^{\beta_n-1}dz$$
$$(i=1, 2, \cdots, n). \tag{15.9}$$

(ii) β_k 的实部为負的情形。

此时 α_k 是 $K(z)$ 的极点（无限大点）。但除 α_k 以外，对于其他的 α_i，(15.9)式仍然成立，因而可得到 y_x 的 $n-1$ 个特解。然而，由于不管全部 β 的实部是正是負，α_0 永为零点，所以积分路徑 C 若取自 α_0 出发环繞极点 α_k 而回到 α_0 的任意閉曲綫，則能满足

(15.8′)，因而沿此閉曲綫作 (15.2) 的积分就可得到关于 α_k 的特解。在此情况下的$[K(z)]_C$❶当然是零，可是(15.2)的积分由于积分路徑 C 的內部含有奇点 α_k，故一般不为零。当 α_0 为 0 或 ∞ 时，积分路徑 C 如图 15.1 所示。

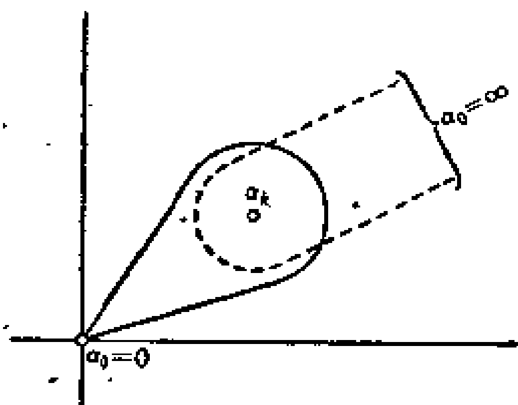


图 15.1

根据以上所述，当 β_k，β_{k+1}，…等的实部为負时，就可以求得关于极 α_k，α_{k+1}，…的 y_x 的特解。

其次我們考虑(15.1)式所对应的非齐次方程

$$\sum_{i=0}^{n}(a_ix+b_i)y_{x+i}=c^xf(x). \tag{15.10}$$

其中 c 为常数(也可以是复数)，$f(x)$ 是 x 的 m 次的有理整函数。今試将 y_x 取作

$$y_x=(c_0+c_1x+\cdots+c_{m-1}x^{m-1})c^x+u(x), \tag{15.11}$$

其中 $u(x)$ 是 x 的新函数，c_0，c_1，…，c_{m-1} 是如下确定的系数。

我們将(15.11)式代入(15.10)式，則左边成为下列形式：

$$\sum_{i=0}^{n}(a_ix+b_i)u(x+i)+c^xg(x)=c^xf(x).$$

其中 $g(x)$ 与 $f(x)$ 很明显地是同次 (m 次) 的有理整函数，若令 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的 x，x^2，…，x^n 的各項系数相等，則由此得到 m 个条件，从而可以确定出 m 个系数 c_0，c_1，…，c_{m-1}. 此时，所給定的差分方程化为

$$\sum_{i=0}^{n}(a_ix+b_i)u(x+i)=\mu c^x. \tag{15.12}$$

其中 $\mu=f(x)-g(x)$ 是一常数。

要求这个方程的解 $u(x)$，与 (15.2)式一样，我們取 λ 为某一

❶ 原书誤为 $K(z)$.——校者注

常数，令

$$u(x)=\lambda\int_C z^{x-1}\varphi(z)dz, \tag{15.13}$$

而将其代入(15.12)式，并設 $a(z)$ 与 $b(z)$ 为与齐次方程的情形相同的函数，则得

$$\lambda\int_C z^{x-1}\left\{b(z)\varphi(z)-z\frac{d}{dz}[a(z)\varphi(z)]\right\}dz+\lambda[z^x a(z)\varphi(z)]_C=\mu c^x.$$

若选取 $\varphi(z)$ 使第一項为零，则 (15.5) 和前面对 $\varphi(z)$ 的討論仍旧适用。

这样的 $\varphi(z)$ 一經选定以后，就必定得到

$$\lambda[z^x a(z)\varphi(z)]_C=\mu c^x. \tag{15.14}$$

若 c 不等于 $a(z)=0$ 的任何根，则取积分路徑 C 的下限为永远使得 $a(z)=0$ 的零点 α_0，其上限为 c，则

$$\begin{aligned}&\lambda[z^x a(z)\varphi(z)]_{\alpha_0}^{c}\\&=\lambda[c^x a(c)\varphi(c)]=\mu c^x.\end{aligned}$$

故

$$\lambda=\frac{\mu}{a(c)\varphi(c)}, \tag{15.15}$$

这样就滿足(15.14)的条件，从而 $u(x)$ 的特解可由

$$u(x)=\frac{\mu}{a(c)\varphi(c)}\int_{\alpha_0}^{c}z^{x-1}\varphi(z)dz \tag{15.16}$$

求出，y_x 由(15.11)式来确定。

若 c 与 $a(z)=0$ 的某一根相同时，则 $u(x)$ 的特解可以用

$$u(x)=\lambda c^x \tag{15.17}$$

的形式来求得。为了确定 λ，将它代入(15.12)式。于是

$$\lambda x\cdot c^x a(c)+\lambda c^x b(c)=\mu c^x,$$

由于 $a(c)=0$，所以

$$\lambda=\frac{\mu}{b(c)}. \tag{15.18}$$

但若 $b(c)=0$，则此式不成立。而这就需要考虑当 c 是 $a(c)=0$ 的 r 重根同时又是 $b(c)=0$ 的 s 重根的情形。

a) 若 $r>s$，则 $u(x)$ 的特解是

$$u(x)=\lambda c^x x^s, \tag{15.19}$$

其中的 λ 是将(15.19)代入(15.12)而求出的。

b) 若 $r=s$，则令

$$u(x)=c^x v(x), \tag{15.20}$$

并将它代入(15.12)式，消去因子 c^x，即得形如

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i c^i x+b_i c^i)v(x+i)=\mu \tag{15.21}$$

的差分方程。此时若将 $v(x+i)$ 用 Δv, $\Delta^2 v$, $\cdots$, $\Delta^n v$ 来表示，则因含有 v, Δv, $\cdots$, $\Delta^{r-1}v$ 的项消失，故令

$$w(x)=\Delta^r v(x), \tag{15.22}$$

即得关于 $w(x)$ 的 $n-r$ 阶的差分方程，解此方程即可求出 $w(x)$，从而 $v(x)$, $u(x)$ 依次可以求出。

c) 若 $r<s$，则在(15.12)中将 x 用 $x+1$ 代替。于是在所得的式子中，相当于 $b(z)$ 的项为原来 $a(z)$ 和 $b(z)$ 的和。而 c 为 $a(z)+b(z)=0$ 的 r 重根，从而这又归并成 $r=s$ 的情形。

例 1. 将在§14中处理过的方程：

$$y_{x+1}-xy_x=0 \tag{15.23}$$

用本节的方法求解。将此方程与(15.1)式比较，即有

$$n=1,\ a_0=-1,\ b_0=0,\ a_1=0,\ b_1=1,$$

所以 $a(z)=-1$, $b(z)=z$，从而

$$\int\frac{b(z)}{za(z)}dz=\int(-1)dz=-z,$$

故

$$\varphi(z)=-e^{-z}.$$

积分路径 C，由(15.4)式必须满足 $[z^x e^{-z}]_C=0$。但是方括号中的 $z^x e^{-z}$，当 $x>0$ 而且 $z=0$ 时为零，又一般当 $z=\infty$ 时也为零。因此当 $x>0$ 时，可以沿任意积分路径自 0 到 ∞ 积分。于是根据(15.2)式，y_x 的特解是下列形式，即

$$\eta(x)=\int_0^{\infty} z^{x-1}e^{-z}dz. \tag{15.24}$$

又設 $z=\log\left(\frac{1}{w}\right)$，也就是設 $w=e^{-z}$，則上式化为

$$\eta(x)=\int_0^1\left(\log\frac{1}{w}\right)^{x-1}dw. \tag{15.24'}$$

(15.24) 式，(15.24′) 式的右边是 **Euler 的第二型积分**，它們只不过是 Gamma-函数的另一种表示而已。这些結果与 (14.6) 式的結果是一致的。但若沒有 $x>0$ 的条件則这二个式子不成立。

例 2. 在对称型 2 阶綫性差分方程

$$y_{x-1}-2(ax+b)y_x+y_{x+1}=0 \tag{15.25}$$

中，将 x 改写为 $x+1$，則得

$$y_x-2(ax+a+b)y_{x+1}+y_{x+2}=0, \tag{15.25'}$$

与 (15.1) 式相比較，由于

$$a_0=0,\ b_0=1,\ a_1=-2a,\ b_1=-2(a+b),\ a_2=0,\ b_2=1,$$

故得下列結果：

$$a(z)=-2az,\qquad b(z)=1-2(a+b)z+z^2,$$

$$\frac{b(z)}{za(z)}=-\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{z^2}+1\right)+\frac{a+b}{az},$$

$$\int\frac{b(z)}{za(z)}dz=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{z}-z\right)+\frac{a+b}{a}\log z,$$

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2az}\exp\left\{\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{z}-z\right)+\frac{a+b}{a}\log z\right\}$$

$$=-\frac{1}{2a}z^{\frac{b}{a}}\exp\left\{\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{z}-z\right)\right\}.$$

为了以后計算方便起見，我們令

$$\lambda=x+\frac{b}{a},\quad \alpha=\frac{1}{a},$$

則 y_x 的特解 $\eta(x)$ 一般是下列形式，即

$$\eta(x)=-\frac{1}{2a}\int_C z^{x+\frac{b}{a}-1}\exp\left\{\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{z}-z\right)\right\}dz$$

$$=-\frac{\alpha}{2}\int_C z^{\lambda-1}\exp\left\{\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{z}-z\right)\right\}dz. \tag{15.26}$$

其积分路徑 C 由

$$K(z)\equiv z^{\lambda+1}\exp\left\{\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{z}-z\right)\right\},\ [K(z)]_C=0 \tag{15.27}$$

来确定。

首先設 $a>0(\alpha>0)$. 則在 $z=0$ 处由于

$$\lim_{z\to -0} K(z)=0,\ \lim_{z\to +0} K(z)=\infty,$$

故 $z=0$ 是本性奇点,所以若积分路徑取作自 $z=-0$ 出发繞本性奇点 $z=0$ 一周仍回复到 $z=-0$ 的曲綫如图 15.2 所示,則在其两端 $K(z)$ 取值相等 (0),就可以滿足 (15.27) 的条件。記这样的积分路徑为 C_1,則将 (15.26) 式中的 C 取作 C_1 就得到 y_x 的一个特解。記此特解为 $\eta_1(x)$,則 y_x 的其他特解 $\eta_2(x)$ 可由下列方法求出:由于

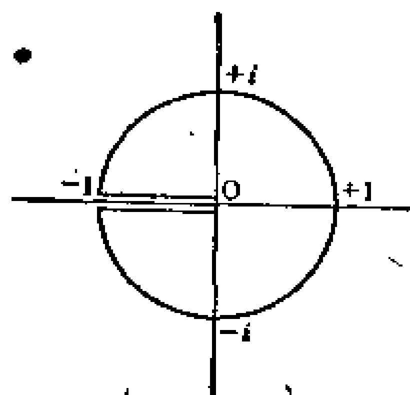


图 15.2

$$\lim_{z\to +\infty} K(z)=0,$$

所以如图 15.3 所示,可取自 $z=+\infty$ 出发繞 $z=0$ 一周仍回复到 $z=+\infty$ 的曲綫为积分路徑,記这个积分路徑为 C_2 就可求出 $\eta_2(x)$.

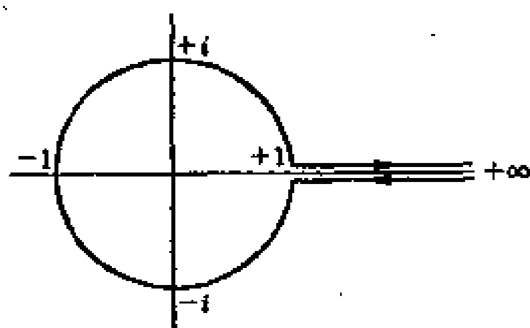


图 15.3

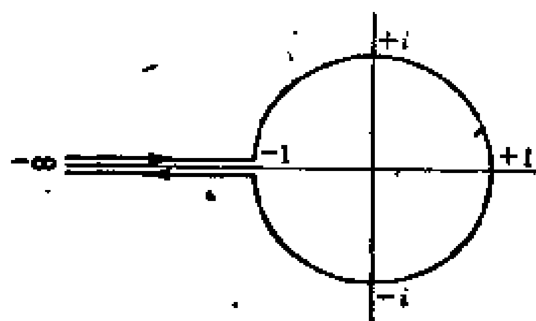


图 15.4

以上的解可以表示成 Bessel 函数。为此,我們对 $\eta_1(x)$ 作变换 $z=\dfrac{1}{\zeta}$,而对 $\eta_2(x)$ 作变换 $z=-\zeta$,則 z-平面上的积分路徑 C_1, C_2 变换为 ζ-平面上如图 15.4 所示的曲綫,将此积分路徑取作 L,則 $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ 成为下列形式,即

$$\left.\begin{aligned}\eta_1(x)&=\frac{\alpha}{2}\int_L \zeta^{-(\lambda+1)}\exp\left\{\frac{\alpha}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\right\}d\zeta,\\ \eta_2(x)&=-\frac{(-1)^\lambda\alpha}{2}\int_L \zeta^{-(-\lambda+1)}\exp\left\{\frac{\alpha}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\right\}d\zeta.\end{aligned}\right\} \tag{15.28}$$

現由于 Bessel 函数 $J_\lambda(\alpha)$ 可表示为

$$J_\lambda(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \zeta^{-(\lambda+1)}\exp\left\{\frac{\alpha}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\right\}d\zeta,$$

所以(15.28)的两式化为

$$\left.\begin{aligned}\eta_1(x)&=\alpha\pi iJ_\lambda(\alpha),\\ \eta_2(x)&=-(-1)^\lambda\alpha\pi i\,J_{-\lambda}(\alpha)=-\alpha\pi i\,J_{-\lambda}(-\alpha).\end{aligned}\right\}\qquad(15.29)$$

以上的結果是在 $a>0(\alpha>0)$ 的情形下导出的，可是当 $a<0(\alpha<0)$ 时，也同样得到(15.29)式的結果，因此上式的成立与否与 $a(\alpha)$ 的正負无关。

一般若取 n 为整数，则由 Bessel 函数的定理，当 $\lambda\neq n$ 时，$\eta_1(x)$ 与 $\eta_2(x)$ 相互独立，成为两个基本解。而当 $\lambda=n$ 时，因为

$$J_n(\alpha)=(-1)^nJ_{-n}(\alpha),$$

所以

$$\eta_2(x)=-\eta_1(x).$$

当 $\lambda=n$ 时的第二个独立解可如下求之。即取

$$\begin{aligned}\eta_2'(x)&=\alpha\pi i\left[J_\lambda(\alpha)\cot\pi\lambda-J_{-\lambda}(-\alpha)\frac{(-1)^\lambda}{\sin\pi\lambda}\right]\\&=\alpha\pi i\,\frac{J_\lambda(\alpha)\cos\pi\lambda-(-1)^\lambda J_{-\lambda}(-\alpha)}{\sin\pi\lambda},\end{aligned}$$

则由于 $\cot\pi\lambda$ 与 $(-1)^\lambda/\sin\pi\lambda$ 都是以1为周期的周期函数，所以 $\eta_2'(x)$ 是 y_x 的解。我們知道等号右边的因式：

$$\frac{J_\lambda(\alpha)\cos\pi\lambda-(-1)^\lambda J_{-\lambda}(-\alpha)}{\sin\pi\lambda}$$

即是 **Neumann 函数** $N_\lambda(\alpha)$。于是

$$\eta_2'(x)=\alpha\pi i\,N_\lambda(\alpha).\qquad(15.30)$$

但当 $\lambda=n$ 时，$N_n(\alpha)=0/0$ 是不定型，此时必須按分子分母对 λ 微分的方法去求 $N_n(\alpha)$，亦即

$$N_n(\alpha)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\lambda(\alpha)}{\partial\lambda}-(-1)^n\frac{\partial J_{-\lambda}(\alpha)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=n}.\qquad(15.31)$$

第5章　綫性偏差分方程

§16　綫性偏差分方程的类型

設 $w(x, y)$ 是两个自变数 x, y 的函数，則含有 w 关于 x 或 y 的偏差分的方程，即

$$\Phi(x, y, \Delta_x w, \Delta_y w, \Delta_x^2 w, \Delta_{xy}^2 w, \Delta_y^2 w, \cdots)=0, \quad (16.1)$$

叫做**偏差分方程**。若将其中的偏差分根据 (1.7)，(1.8) 式用 w 表示，并进行整理，則上式化为

$$F[x, y, w(x, y), w(x+1, y), w(x, y+1), w(x+1, y+1), \cdots]=0. \quad (16.2)$$

通常我們以此式作为偏差分方程的一般形式。

w 是三个以上自变数的函数的情形与两个自变数的情形是一样的，为了不使問題复杂化，以后我們限制 w 是 x, y 的函数。这样，w 是在給定了坐标系的 x, y 的平面上的点 (x, y)，$(x+1, y)$，$(x, y+1)$，… 等处有确定函数值的函数，或者看成在坐标面的这些点竪立了纵坐标。在这种情形下，坐标面也可以不是平面。而 x＝常数，y＝常数所表示的曲綫也不一定是直綫。

当 (16.1) 式的左边 w 的偏差分是一次时，也就是 (16.2) 是 w 的一次式时，我們称这个偏差分方程为"綫性"的，又当它不含有与 w 无关的項时称它为"齐次"的，这与常差分方程的情形是一致的。

綫性偏差分方程中最簡单的是

$$p_0 w(x, y)+p_1 w(x+1, y)+p_2 w(x, y+1)=K(x, y). \quad (16.3)$$

其中 $p_0, p_1, p_2, K(x, y)$ 是 x 与 y 的函数或是常数，当 $K=0$ 时是齐次方程。

此方程是由图 16.1 所示的三点上 w 之間的关系

$$q_0 w + q_1 \Delta_x w + q_2 \Delta_y w = K(x, y) \qquad (16.3')$$

而导出的。

其次简单的是图16.2所示的四点上w之間的关系：

$$p_0 w(x, y) + p_1 w(x+1, y) + p_2 w(x, y+1) + p_3 w(x+1, y+1) = K(x, y), \qquad (16.4)$$

而它是由下式所导出的，即

$$q_0 w + q_1 \Delta_x w + q_2 \Delta_y w + q_3 \Delta^2_{xy} w = K(x, y). \qquad (16.4')$$

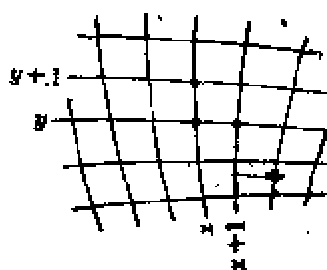


图　16.1

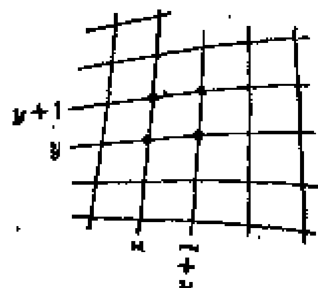


图　16.2

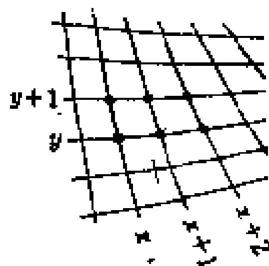


图　16.3

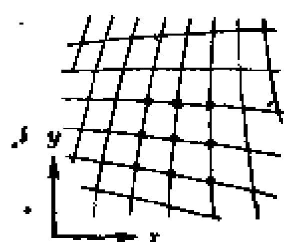


图　16.4

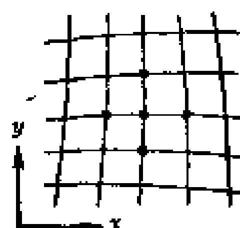


图　16.5

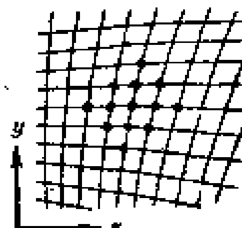


图　16.6

偏差分方程的阶数，是用沿x或y的方向的差分阶数中的最大者作为阶数的。例如(16.3)式与(16.4)式二者都是1阶的，图16.3～16.5所示各点处w之間的关系是2阶的，而图16.6所对应的方程是4阶的。图16.5中按十字形排列的四点所对应的方程

$$D_x(pw) + D_y(qw) = K(x, y), \qquad (16.5)$$

其中

$$D_x(pw) = p_1(x, y)w(x-1, y) + p_0(x, y)w(x, y) + p_1(x+1, y)w(x+1, y),$$

$$D_y(qw) = q_1(x, y)w(x, y-1) + q_0(x, y)w(x, y) + q_1(x, y+1)w(x, y+1)$$

是在应用問題中常出現的方程，我們称它为**十字型偏差分方程**。

§17 綫性偏差分方程的一般解与边界条件

設 x 与 y 的变化域为任意一个区域，在此区域内所含有的全部的点 (x, y) 的个数为 r，对于这些点我們一个一个地建立綫性偏差分方程，則可得到 r 个关于 w 为一次的方程。将这 r 个方程中出現的 w 分别看作未知数，則所給定的偏差分方程，在所考慮的变化域内成为上述的 r 个一次方程的联立方程。然而此 r 个方程中所出現的 w 的个数一般比 r 多，設为 $r+n$ 个，那末由代数学的定理，或由§2常差分方程所已說明过的相同的推理知道，所給定的方程的一般解中含有 n 个任意常数，又滿足給定方程的互相独立的特解也只有 n 个。这与常差分方程的情形沒有什么不同。所不同的是，这里的 n，对常差分方程来說，等于方程的阶数，而对偏差分方程来說，它不仅随阶数而变，而且也随变化域的变化而变化。

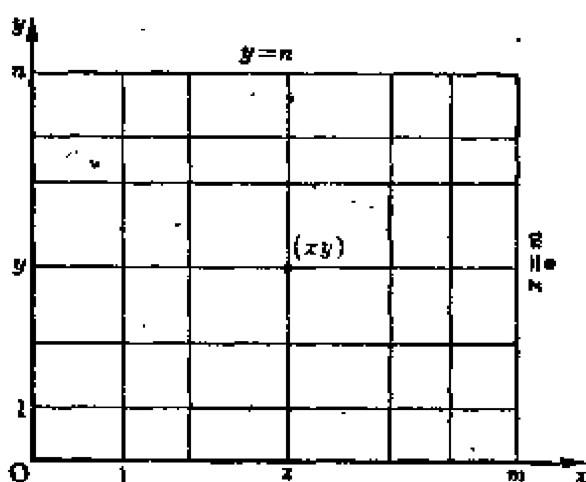


图 17.1

为了决定上述 n 个未知常数得到固定的解，必須总共有 n 个边界条件或初始条件。为了說明这一点，我們以 $x=0, x=m, y=0, y=n$ 四条綫所圍成的区域（图 17.1）为例，来考慮两三个簡单的情况。含在此区域内的点 (x, y)，即未知数 w 的个数，連同边界上的点共有 $(m+1)(n+1)$ 个。而在 $x=0, 1, 2, \cdots, m-1$; $y=0, 1, 2, \cdots, n-1$ 所建立起来的1阶差分方程 (16.4) 合計有 $m\times n$ 个，比未知数 w 要少 $m+n+1$ 个。所以为了确定方程的解，必須有这样多的边界条件。为此，例如若已知变化域的相交的任何两

条边界上各点w的值就足够了。

又对于(16.5)式的十字型方程，将边界綫上的点除外，而只就变化域内部的各点建立方程，则方程的个数是$(m-1)(n-1)$，而且由于在四角的点w不出現，所以未知数w的个数是$(m+1)(n+1)-4$ ❶，卽未知数多$2(m+n-2)$个❷。因而在这种情形下，例如若在除去变域四角以外的边界綫上各点上給定了w的值，则可得到固定的解。自然，在这种情形下，w在四角的值，由于与解沒有什么关系，所以w在四角的值也可以看作給定的。

参 考 文 献

P. Funk: Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen (Berlin, 1920).

N. E. Nörlund: Vorlesungen über Differenzenrechnung (Berlin, 1924).

Fr. Bleich, E. Melan: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik (Berlin, 1927).

福田武雄：構造力学(河出，1942).

福田武雄：差分法(河出，1948)❸.

❶ 原书誤为$(m-1)(n-1)-4$。——校者注

❷ 原书誤为$(m-n-1)$。——校者注

❸ 原书誤为1848。——譯者注